LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Andreas Fackler

22. Februar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zur Klausur

Name: ____________________

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in \mathbb{R}^n$. Für jedes $\delta > 0$ sei B_δ die abgeschlossene Kugel mit Radius δ und Mittelpunkt a. Zeigen Sie:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{v(B_\delta)} \int_{B_\delta} f \, \mathrm{d}x = f(a)$$

[8 Punkte]

Wir müssen für jede Nullfolge $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit positiven Gliedern zeigen, dass

$$a_k := \left| \frac{1}{v(B_{\delta_k})} \int_{B_{\delta_k}} f(x) \, \mathrm{d}x - f(a) \right|$$

für $k \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Sei also $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben. Da B_{δ_k} jeweils beschränkt und abgeschlossen, also kompakt ist, nimmt die stetige Funktion $|f - f(a)|$ auf B_{δ_k} ihr Maximum an. Sei $\xi_k \in B_{\delta_k}$ für $k \in \mathbb{N}$ so, dass $|f(x) - f(a)| \leq |f(\xi_k) - f(a)|$ für alle $x \in B_{\delta_k}$. Dann gilt für jedes k:

$$\begin{aligned} a_k &= \left| \frac{1}{v(B_{\delta_k})} \int_{B_{\delta_k}} f(x) \, \mathrm{d}x - \frac{1}{v(B_{\delta_k})} \int_{B_{\delta_k}} f(a) \, \mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{v(B_{\delta_k})} \int_{B_{\delta_k}} |f(x) - f(a)| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{v(B_\delta)} \int_{B_\delta} |f(\xi_k) - f(a)| \, \mathrm{d}x = |f(\xi_k) - f(a)| \end{aligned}$$

Nun ist $\|\xi_k - a\| \leq \delta_k$ und $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$, also $\lim_{k\to\infty} \xi_k = a$. Aus der Stetigkeit von f folgt damit $\lim_{k\to\infty} f(\xi_k) = f(a)$, also konvergiert a_k gegen 0.

Name: ____________________

Aufgabe 2. Sei $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq \sqrt{\pi/2}\right\}$. Berechnen Sie:

$$\int_A \left(x^3 y + \cos\left(x^2\right)\right) \,\mathrm{d}(x,y)$$

[8 Punkte]

Für jedes $x \in \left[0, \sqrt{\pi/2}\right]$ ist $A_x = [0,x]$. Der Integrand ist stetig und A ist kompakt[1], also erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\int_A (x^3 y + \cos(x^2)) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^x (x^3 y + \cos(x^2)) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left(x^3 \frac{y^2}{2} + y \cos(x^2) \Big|_0^x \right) \,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left(x^3 \frac{x^2}{2} + x \cos(x^2) \right) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^6}{12} + \frac{1}{2} \sin(x^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{\pi^3}{8 \cdot 12} + \frac{1}{2} = \frac{\pi^3}{96} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

[1] A ist der Durchschnitt der Urbilder der abgeschlossenen Menge $[0,\infty)$ unter den stetigen Funktionen y, $x-y$ und $\sqrt{\pi/2}-x$, also abgeschlossen. Außerdem ist $A \subseteq [0, \sqrt{\pi/2}]^2$, also beschränkt.

Name: ______________________________

Aufgabe 3. Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$A = \{(s\cos t, s\sin t) \mid 0 < t < 2\pi,\ 0 < s < (\sin(2t))^2\}$$

[8 Punkte]

Die Menge ist beschränkt und offen und daher integrierbar[2]. Wir wenden den Transformationssatz mit Polarkoordinaten an. Außerdem verwenden wir die Formeln $(\sin x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ und $(\cos x)^2 = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, die unmittelbar aus dem Additionstheorem des Kosinus folgen:

$$\begin{aligned}
v(A) &= \int \mathbf{1}_A(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathbf{1}_A(s\cos t, s\sin t) s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\int_0^{(\sin(2t))^2} s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(\sin(2t))^4}{2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{1-\cos(4t)}{2}\right)^2}{2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1-2\cos(4t)+(\cos(4t))^2}{8}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1-2\cos(4t)+\frac{1+\cos(8t)}{2}}{8}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{16}t - \frac{\sin(4t)}{16} + \frac{\sin(8t)}{128}\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{8}\pi
\end{aligned}$$

(Alternativ kommt man auch ohne die Additionstheoreme zum Ziel, indem man zweimal partiell integriert.)

[2] Das Urbild B der offenen Menge $(0,\infty)$ unter der stetigen Funktion $(\sin(2t))^2 - s$ ist offen, und A ist das Bild von B unter dem auf $(0,\infty)\times(0,2\pi)$ definierten Diffeomorphismus $(s,t)\mapsto(s\cos t, s\sin t)$, also offen. Außerdem ist $(\sin(2t))^2$ immer höchstens 1, also A beschränkt.

Name: ______________________________

Aufgabe 4. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine integrierbare Menge, die jede horizontale Gerade $\mathbb{R} \times \{y\}$ mit $y \in \mathbb{R}$ in höchstens abzählbar vielen Punkten schneidet. Zeigen Sie, dass A eine Nullmenge ist.

[8 Punkte]

Da A integrierbar ist, ist $\mathbf{1}_A$ integrierbar, und es gilt $v(A) = \int \mathbf{1}_A(x, y)\,\mathrm{d}(x, y)$. Es genügt also zu zeigen, dass dieses Integral null ist.

Für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist nun nach Voraussetzung die Funktion $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_y(x) = \mathbf{1}_A(x, y)$ nur an abzählbar vielen Stellen von null verschieden. Da jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine Nullmenge ist, ist also nach dem Modifikationssatz $\int f_y(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Aus dem Satz von Fubini folgt damit:

$$\int \mathbf{1}_A(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int \int \mathbf{1}_A(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int \int f_y(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int 0\,\mathrm{d}y = 0$$

Name: ______________________________

Aufgabe 5. Betrachten Sie die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (e^{2t}, e^{2-2t})$ und die 1-Form

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \omega$. [8 Punkte]

Wir substituieren[3] $s = 1-t$:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_0^1 \left(\frac{e^{2t}}{e^{4t}+e^{4-4t}} \cdot 2e^{2t} + \frac{e^{2-2t}}{e^{4t}+e^{4-4t}} \cdot (-2)e^{2-2t} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{2e^{4t}}{e^{4t}+e^{4-4t}}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{2e^{4-4t}}{e^{4t}+e^{4-4t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{2e^{4t}}{e^{4t}+e^{4-4t}}\,\mathrm{d}t - \int_1^0 \frac{2e^{4s}}{e^{4-4s}+e^{4s}}(-1)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \frac{2e^{4t}}{e^{4t}+e^{4-4t}}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{2e^{4s}}{e^{4s}+e^{4-4s}}\,\mathrm{d}s = 0
\end{aligned}$$

[3]Alternativ kann man den Integranden auch zu $\frac{1}{2} \cdot \frac{4e^{4t}-4e^{4-4t}}{e^{4t}+e^{4-4t}}$ umformen. Da dieser die Form $\frac{1}{2}\frac{f'}{f}$ hat, ist seine Stammfunktion $\frac{1}{2}\ln(f) = \frac{1}{2}\ln(e^{4t}+e^{4-4t})$. Auch durch Substitution $s = e^{4t}+e^{4-4t}$ mit dem Nenner erhält man dieses Ergebnis.

Name: ____

Aufgabe 6. Bestimmen Sie eine Stammfunktion der folgenden 1-Formen auf $\mathbb{R}^2$ oder beweisen Sie, dass es keine gibt:

(a) $\sin y \,\mathrm{d}x + x \sin y \,\mathrm{d}y$

(b) $(x^2 + y)\,\mathrm{d}x + (y^2 + x)\,\mathrm{d}y$

[2+6 Punkte]

(a) Es gibt keine, da die 1-Form nicht geschlossen ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \sin y = \cos y \neq \sin y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \sin y)$$

(b) Diese 1-Form ist geschlossen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(x^2 + y) = 1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 + x)$$

Da sie auf der sternförmigen Menge $\mathbb{R}^2$ definiert ist, hat sie daher eine Stammfunktion F. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $F(0,0) = 0$ ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{\gamma_{x,y}} (u^2 + v)\,\mathrm{d}x + (v^2 + u)\,\mathrm{d}v = \int_0^1 ((t^2x^2 + ty)x + (t^2y^2 + tx)y)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^3}{3}x^3 + t^2xy + \frac{t^3}{3}y^3 \bigg|_0^1 = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} \end{aligned}$$