LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Andreas Fackler 10. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zur ersten Probeklausur (Blatt 9)

Aufgabe 1: $[1,2]^2$ ist kompakt und damit ist die stetige Funktion $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$ auf $[1,2]^2$ integrierbar mit:

$$\begin{aligned}
\int_{[1,2]^2} \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{[1,2]^2} \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}(x,y) = \int_1^2\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_1^2 \left(\frac{-1}{x}+\frac{x}{y^2}\Big|_1^2\right)\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\frac{-1}{2}-\frac{-1}{1}+\frac{2}{y^2}-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = \frac{y}{2}+\frac{-1}{y}\Big|_1^2 = \frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}-\frac{-1}{1} = 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: $A = ([1,2]\times[0,2]^2)\cap f^{-1}([0,\infty))$, wobei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ die stetige Funktion $f(x,y,z) = x - zx^2 - y$ ist. Folglich ist A beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Daher ist A integrierbar.

Für $x\in[1,2]$ ist $A_x = \{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid y,z\geq 0, y+zx^2\leq x\}$ und für $y\in[0,x]$ ist $(A_x)_y = \{z\in\mathbb{R} \mid 0\leq z\leq \frac{x-y}{x^2}\} = \left[0,\frac{x-y}{x^2}\right]$ (sonst leer). Mit dem Satz von Fubini erhalten wir das Volumen:

$$\begin{aligned}
v(A) &= \int_1^2\int_0^x v\left(\left[0,\frac{x-y}{x^2}\right]\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2\int_0^x \frac{x-y}{x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \frac{y}{x}-\frac{y^2}{2x^2}\Big|_0^x\,\mathrm{d}x = \int_1^2\left(1-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Für jedes $k\in\mathbb{N}$ ist $[-k,k]^n$ kompakt, also ist f jeweils über $[-k,k]^n$ integrierbar und nach Definition von A gilt:

$$\int f\cdot\mathbf{1}_{[-k,k]^n}\,\mathrm{d}x = \int_{[-k,k]^n} f\,\mathrm{d}x \leq \sup A.$$

Die Folge der Funktionen $f\cdot\mathbf{1}_{[-k,k]^n}$ ist aber monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen f, also ist nach dem Satz von Levi f integrierbar mit dem Integral

$$\int f\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int f\cdot\mathbf{1}_{[-k,k]^n}\,\mathrm{d}x \leq \sup A$$

Sei nun umgekehrt K kompakt. Dann ist $f\cdot\mathbf{1}_K\leq f$, also $\int_K f\,\mathrm{d}x\leq\int f\,\mathrm{d}x$. Daraus folgt $\sup A\leq\int f\,\mathrm{d}x$, also ist $\int f\,\mathrm{d}x = \sup A$.

Aufgabe 4: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und sei die Menge A' der Häufungspunkte von A endlich. Wir zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $v(A) \leq \varepsilon$; dann folgt, dass $v(A) = 0$ sein muss.

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Häufungspunkte von A. Für jeden Häufungspunkt $x \in A'$ von A ist

$$Q_x = \left(x_1 - \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{k}}, x_1 + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{k}}\right) \times \ldots \times \left(x_n - \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{k}}, x_n + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{k}}\right)$$

ein offener Würfel mit $v(Q_x) = \frac{\varepsilon}{k}$ und $x \in Q_x$.

Angenommen, $B = A \setminus \bigcup_{i=1}^k Q_i$ sei eine unendliche Menge. Wähle ein beliebiges $b_0 \in B$ und wähle dann rekursiv für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein beliebiges $b_{j+1} \in B \setminus \{b_0, \ldots, b_j\}$. Dann ist $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine injektive Folge in B (das heißt, jedes Folgenglied kommt nur einmal vor). Da A beschränkt ist und $B \subseteq A$, ist also auch die Folge $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt und hat daher einen Häufungspunkt c. Da c höchstens einmal in der Folge $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ vorkommt, gibt es auf jeden Fall eine Teilfolge in $B \setminus \{c\}$, die gegen c konvergiert. Also ist c Häufungspunkt von B und damit auch von A, das heißt $c \in A'$. Da aber Q_c eine offene Umgebung von c ist, die kein Element von B enthält, ist das unmöglich.

Es ist also B endlich und daher $v(B) = 0$. Daher ist wegen $A \subseteq B \cup \bigcup_{x\in A'} Q_x$:

$$v(A) \leq v\left(B \cup \bigcup_{x\in A'} Q_x\right) \leq v(B) + \sum_{x\in A'} v(Q_x) = 0 + \sum_{x\in A'} \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$