LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Andreas Fackler

20. Dezember 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 8

Aufgabe 1: Wegen $E \subseteq [-a,a] \times [-b,b]$ ist E beschränkt; als Urbild von $[0,1]$ unter der stetigen Funktion $(x,y) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ist E abgeschlossen, also ist E kompakt und damit integrierbar.

Da die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \varphi(x,y) = (ax, by)$ linear, also stetig differenzierbar ist, und ihre Umkehrabbildung $(x,y) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ ebenfalls linear ist, ist sie ein Diffeomorphismus. Ist $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe, so gilt $\mathbf{1}_K(x,y) = \mathbf{1}_E(\varphi(x,y))$. Mit dem Transformationssatz folgt:

$$\begin{aligned} v(E) &= \int \mathbf{1}_E(u,w)\,\mathrm{d}(u,w) = \int \mathbf{1}_E(\varphi(x,y))|\det \varphi'(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y) \\ &= \int \mathbf{1}_K(x,y) \left| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}(x,y) = \int \mathbf{1}_K(x,y) \cdot ab\,\mathrm{d}(x,y) \\ &= ab \cdot v(K) = ab\pi \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbar und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so schreiben wir αA für $\{\alpha x \mid x \in A\}$. Es ist dann $\mathbf{1}_{\alpha A}(\alpha x) = \mathbf{1}_A(x)$ und die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \alpha x$ ist ein Diffeomorphismus mit Jacobi-Matrix αE_n, wobei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix ist. Nach dem Transformationssatz ist also:

$$v(\alpha A) = \int \mathbf{1}_{\alpha A}(u)\,\mathrm{d}u = \int \mathbf{1}_{\alpha A}(\alpha x)|\det(\alpha E_n)|\,\mathrm{d}x = \int \mathbf{1}_A(x)|\alpha^n|\,\mathrm{d}x = |\alpha^n| v(A)$$

Diese Tatsache werden wir bei dieser und der folgenden Aufgabe benutzen.

Als Bild der kompakten Menge $B \times [0,1]$ unter der stetigen Abbildung $(x,t) \mapsto ((1-t)x, th)$ ist K ebenfalls kompakt, also integrierbar.

Für $s \in [0,h]$ ist $K_s = \left\{\left(1 - \frac{s}{h}\right) x \mid x \in B\right\} = \left(1 - \frac{s}{h}\right) B$. Nach dem Satz von Fubini ist daher:

$$\begin{aligned} v(K) &= \int_0^h v(K_s)\,\mathrm{d}s = \int_0^h v\left(\left(1 - \frac{s}{h}\right) B\right)\,\mathrm{d}s = \int_0^h \left(1 - \frac{s}{h}\right)^n v(B)\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{h}{n+1}\left(1 - \frac{s}{h}\right)^{n+1}\Bigg|_0^h v(B) = \frac{h}{n+1} v(B) \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Wegen $D_n \subset [-r,r]^n$ ist D_n beschränkt. Außerdem ist D_n Urbild der abgeschlossenen Menge $[0,r]$ unter der stetigen Funktion $x \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|$. Damit ist D_n kompakt, also integrierbar.

Für $x_n \in [-r,r]$ ist $(D_n)_{x_n} = \{(x_1,\ldots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x_1| + \ldots + |x_{n-1}| \leq r - |x_n|\} = \frac{r-|x_n|}{r} D_{n-1}$.
Nach dem Satz von Fubini ist

$$\begin{aligned} v(D_n) &= \int_{-r}^r v((D_n)_{x_n})\,\mathrm{d}x_n = \int_{-r}^r v\left(\frac{r-|x_n|}{r} D_{n-1}\right)\,\mathrm{d}x_n \\ &= \int_{-r}^r \left(\frac{r-|x_n|}{r}\right)^{n-1} v(D_{n-1})\,\mathrm{d}x_n = 2v(D_{n-1})\int_0^r \left(\frac{r-x_n}{r}\right)^{n-1}\,\mathrm{d}x_n \\ &= 2v(D_{n-1}) \cdot \left.\frac{-(r-x_n)^n}{nr^n}\right|_0^r = \frac{2r}{n} v(D_{n-1}). \end{aligned}$$

Wir zeigen damit per Induktion, dass $v(D_n) = \frac{(2r)^n}{n!}$ ist. Für $n=1$ ist $D_n = [-r,r]$, also $v(D_n) = 2r = \frac{(2r)^1}{1!}$. Ist die Aussage für $n-1$ gezeigt, so folgt:

$$v(D_n) = \frac{2r}{n} v(D_{n-1}) = \frac{2r}{n}\frac{(2r)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(2r)^n}{n!}$$

Aufgabe 4: Die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto -x$ ist ein Diffeomorphismus mit Jacobi-Matrix $-E_n$, wobei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix ist. Mit dem Transformationssatz folgt also:

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = \int f(-x)|\det(-E_n)|\,\mathrm{d}x = -\int f(x)|(-1)^n|\,\mathrm{d}x = -\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Damit muss das Integral 0 sein.