Andreas Fackler 2. Dezember 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 7

Aufgabe 1: Sei $f = \sum_{j=1}^{l} b_j \mathbf{1}_{P_j}$ und $g = \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot \mathbf{1}_{Q_k}$, wobei $P_1, \ldots, P_l \subseteq X$ und $Q_1, \ldots, Q_m \subseteq Y$ Quader sind. Dann ist

$$(f \otimes g)(x, y) = \sum_{j=1}^{l} b_j \mathbf{P_j}(x) \cdot \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot \mathbf{1}_{Q_k}(y) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} b_j c_k \cdot \mathbf{1}_{P_j \times Q_k}(x, y),$$

denn $\mathbf{1}_{P_j}(x) \cdot \mathbf{1}_{Q_k}(y) = \mathbf{1}_{P_j \times Q_k}(x, y)$. Da die Mengen $P_j \times Q_k$ wieder Quader sind, ist also $f \otimes g$ eine Treppenfunktion. Außerdem ist jeweils $v(P_j \times Q_k) = v(P_j) \cdot v(Q_k)$, also:

$$\int f \otimes g \mathrm{d}(x, y) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} b_j c_k \cdot v(P_j) \cdot v(Q_k) = \sum_{j=1}^{l} b_j v(P_j) \cdot \sum_{k=1}^{m} c_k v(Q_k) = \int f \mathrm{d}x \cdot \int g \mathrm{d}y$$

Aufgabe 2: Sei zunächst $\|f\|_1, \|g\|_1 < \infty$. Seien $\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \mathbf{1}_{P_j}$, $\psi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathbf{1}_{Q_k}$ Hüllreihen von f bzw. g mit $I(\varphi), I(\psi) < \infty$. Sei $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung[1] und sei $d_{h(j,k)} = b_j c_k$ und $R_{h(j,k)} = P_j \times Q_k$ für alle $j, k \in \mathbb{N}$. Dann sind alle R_l offene Quader und alle d_l mindestens 0, und es gilt jeweils $\mathbf{1}_{R_{h(j,k)}} = \mathbf{1}_{P_j} \otimes \mathbf{1}_{Q_k}$ also ist $\theta = \sum_{l=0}^{\infty} d_l \mathbf{1}_{R_l}$ eine Hüllreihe. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist nun

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m} b_j \mathbf{1}_{P_j}(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} c_k \mathbf{1}_{Q_k}(y) \quad &= \quad \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} b_j c_k \mathbf{1}_{P_j}(x) \mathbf{1}_{Q_k}(y) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} d_{h(j,k)} \mathbf{1}_{R_{h(j,k)}}(x, y) \\
&\leq \quad \sum_{l=0}^{\infty} d_l \mathbf{1}_{R_l}(x, y) = \theta(x, y),
\end{aligned}$$

also ist $\theta \geq \varphi \otimes \psi \geq f \otimes g$ und somit Hüllreihe von $f \otimes g$. Es ist also $\|f \otimes g\|_1 \leq I(\theta)$ und es genügt zu zeigen, dass $I(\theta) \leq I(\varphi) I(\psi)$ ist. Sei hierzu $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Da h surjektiv

[1] Eine solche Abbildung gibt es, da sowohl $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als auch $\mathbb{N}$ abzählbar unendliche Mengen sind. Konkret könnte man beispielsweise $h(j, k) = \frac{(j+k)(j+k+1)}{2} + j$ setzen. Die Funktion $c \mapsto \frac{c(c+1)}{2}$ wächst streng monoton, also gibt es zu jedem $l \in \mathbb{N}$ genau ein c, so dass $\frac{(c+1)(c+2)}{2} \leq l < \frac{c(c+1)}{2}$ ist. Da $\frac{(c+1)(c+2)}{2} - \frac{c(c+1)}{2} = c + 1$ ist, gibt es dann genau ein $j \leq c$, so dass $l = \frac{c(c+1)}{2} + j$. Mit $k = c - j$ ist dann (k, j) das eindeutige Paar mit $h(k, j) = l$.

ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$, so dass $\{1, \dots N\} \subseteq \{h(j,k) \mid j \leq m, k \leq n\}$. Es folgt wegen $v(R_{j(j,k)}) = v(P_j)v(Q_k)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{N} d_l v(R_l) &\leq \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} d_{h(j,k)} v(R_{h(j,k)}) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} b_j c_k v(P_j) v(Q_k) \\
&= \sum_{j=0}^{m} b_j v(P_j) \sum_{k=0}^{n} c_k v(Q_k) \leq I(\varphi) I(\psi)
\end{aligned}$$

Da dies also für alle Partialsummen gilt, folgt auch:

$$I(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l v(R_l) \leq I(\varphi) I(\psi)$$

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, dass einer der beiden Faktoren ∞ ist, etwa $\|g\|_1 = \infty$. Falls dann $\|f\|_1 > 0$ ist, steht auf der rechten Seite der Ungleichung ∞, also ist sie trivialerweise erfüllt. Sei nun $\|f\|_1 = 0$. Legt man $\infty \cdot 0$ als ∞ fest, so ist die Gleichung auch in diesem Fall trivial. Aber selbst wenn man $\infty \cdot 0 = 0$ definiert, stimmt die Aussage: f ist dann fast überall 0, d.h. überall bis auf einer Nullmenge N. Dann ist auch $N \times Y$ eine Nullmenge, da $\|\mathbf{1}_{N \times [-k,k]^q}\|_1 = \|\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_{[-k,k]^q}\|_1 \leq \|\mathbf{1}_N\|_1 \cdot \|\mathbf{1}_{[-k,k]^q}\|_1 = 0$ ist für alle $[-k,k]$ und $N \times Y$ die Vereinigung aller $N \times [-k,k]^q$ für $k \in \mathbb{N}$ ist. Insbesondere ist also auch $f \otimes g$ fast überall 0, also gilt $\|f \otimes g\|_1 = 0$.

Aufgabe 3: Für jedes k ist wegen Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
\|f \otimes g - f_k \otimes g_k\|_1 &= \|f \otimes g - f \otimes g_k + f \otimes g_k - f_k \otimes g_k\|_1 \\
&= \|f \otimes (g - g_k) - (f - f_k) \otimes g_k\|_1 \\
&\leq \|f \otimes (g - g_k)\|_1 + \|(f - f_k) \otimes g_k\|_1 \\
&\leq \|f\|_1 \cdot \|g - g_k\|_1 + \|f - f_k\|_1 \cdot \|g_k\|_1,
\end{aligned}$$

und da $\|g_k\|_1$ beschränkt ist, g_k L^1-konvergent gegen g und f_k L^1-konvergent gegen f ist, konvergiert dies gegen 0.

Aufgabe 4: Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen f und $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen g L^1-konvergente Folge von Treppenfunktionen. Dann ist $(f_k \otimes g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach Aufgabe 3 eine gegen $f \otimes g$ L^1-konvergente Folge von Treppenfunktionen, also ist $f \otimes g$ integrierbar und nach Aufgabe 1 gilt:

$$\int f \otimes g \mathrm{d}(x,y) = \lim_{k\to\infty} \int f_k \otimes g_k \mathrm{d}(x,y) = \lim_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d}x \cdot \int g_k \mathrm{d}y = \int f \mathrm{d}x \cdot \int g \mathrm{d}x$$