



Prof. Dr. H.-D. Donder  
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011  
2. Dezember 2010

## Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen Übungsblatt 7

Im Folgenden seien immer  $X = \mathbb{R}^p$ ,  $Y = \mathbb{R}^q$  und  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $g : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Definiere dann  $f \otimes g : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  durch

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x) \cdot g(y) \quad \text{für } (x, y) \in X \times Y.$$

**Aufgabe 1:** Seien  $f, g$  Treppenfunktionen. Zeigen Sie, dass  $f \otimes g$  eine Treppenfunktion ist und gilt:

$$\int f \otimes g d(x, y) = \int f dx \cdot \int g dy.$$

**Aufgabe 2:** Zeigen Sie, dass  $\|f \otimes g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ .

**Aufgabe 3:** Seien die Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$   $L^1$ -konvergent gegen  $f$  und die Folge  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$   $L^1$ -konvergent gegen  $g$ . Weiterhin seien  $\|f\|_1, \|g\|_1 < \infty$ . Zeigen Sie, dass die Folge  $(f_k \otimes g_k)_{k \in \mathbb{N}}$   $L^1$ -konvergent gegen  $f \otimes g$  ist.

**Aufgabe 4:** Seien  $f, g$  integrierbar. Zeigen Sie, dass  $f \otimes g$  integrierbar ist und gilt:

$$\int f \otimes g d(x, y) = \int f dx \cdot \int g dy.$$

Abgabe bis spätestens 11:30 Uhr am 13. Dezember 2010 im Übungskasten.