LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Andreas Fackler

6. Dezember 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Sei $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$.

1. Fall: Nehmen wir zuerst an, das Supremum habe den endlichen Wert $C \in \mathbb{R}$. Dann ist $v(A_k) \leq C$ für alle A_k, also sind alle A_k integrierbar. Wegen $A_k \subseteq A_{k+1}$ ist die Folge der charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_{A_k}$ monoton wachsend. Damit ist auch die Folge der Integrale

$$v(A_k) = \int \mathbf{1}_{A_k} \,\mathrm{d}x$$

monoton wachsend; außerdem ist ihr Supremum C, das heißt, sie konvergiert gegen C. Nach dem Satz von Levi ist also auch der punktweise Limes der 1_{A_k} integrierbar mit Integral C:

$$v(A) = \int \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}x = \int \lim_{k\to\infty} \mathbf{1}_{A_k} \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int \mathbf{1}_{A_k} \,\mathrm{d}x = C$$

2. Fall: Nehmen wir nun an, das Supremum sei ∞. Da $A_k \subseteq A$ für alle k, ist $v(A_k) \leq v(A)$ für alle k, also muss $v(A) = \infty$ sein.

Aufgabe 2: Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist für alle $r > 0$ die Menge $V \cap \mathrm{U}_r(0)$ beschränkt und offen, also $\mathbf{1}_{V\cap \mathrm{U}_r(0)} = \mathbf{1}_V \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{U}_r(0)}$ integrierbar. Das heißt aber, dass $\mathbf{1}_V$ über allen $\mathrm{U}_r(0)$ mit $r > 0$ integrierbar ist. Folglich ist $\mathbf{1}_V$ lokal-integrierbar und damit V messbar.

Sei nun $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Dann ist für jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ die Menge $A \cap K$ kompakt, also $\mathbf{1}_{A\cap K} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_K$ integrierbar. Das heißt, dass $\mathbf{1}_A$ über jeder kompakten Menge integrierbar ist. Folglich ist $\mathbf{1}_A$ lokal-integrierbar und damit A messbar.

Aufgabe 3: Da A messbar und beschränkt, also integrierbar ist, ist auch $\mathbf{1}_A$ integrierbar. Also gibt es nach dem Satz von Fubini eine Nullmenge $N \subseteq [0,1]$, so dass für alle $y \in [0,1] \setminus N$ die Funktion $x \mapsto \mathbf{1}_A(x,y)$ integrierbar ist und es gilt:

$$0 < v(A) = \int \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}(x,y) = \int_{[0,1]\setminus N} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_A(x,y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Da $[0,1] \setminus B$ eine Nullmenge ist, ist dies nach dem Modifikationssatz gleich dem folgenden Integral:

$$\int_{B\setminus N} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_A(x,y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Da es nicht null ist, gibt es also ein $b \in B \setminus N$, so dass

$$0 \neq \int_{[0,1]} \mathbf{1}_A(x,b)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} \mathbf{1}_{A_b}(x)\,\mathrm{d}x = v(A_b),$$

also A_b keine Nullmenge ist.

Aufgabe 4: Sei $A = \{(x,y) \in [a,b]^2 \mid x \leq y\}$. Dann ist A kompakt, also $\mathbf{1}_A$ integrierbar. Somit ist auch $f \cdot \mathbf{1}_A$ integrierbar. Für alle $x, y \in [a,b]^2$ ist $\mathbf{1}_A(x,y) = \mathbf{1}_{[a,y]}(x) = \mathbf{1}_{[x,b]}(y)$. Nach dem Satz von Fubini existiert für fast alle x das Integral $\int_{[a,b]} f(x,y) \cdot \mathbf{1}_A(x,y)\,\mathrm{d}y$ und es ist

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]^2} f(x,y) \cdot \mathbf{1}_A(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} f(x,y) \cdot \mathbf{1}_A(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} f(x,y) \cdot \mathbf{1}_{[x,b]}(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{[a,b]} \left(\int_{[x,b]} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ebenso folgt mit dem Satz von Fubini:

$$\int_{[a,b]^2} f(x,y) \cdot \mathbf{1}_A(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{[a,b]} \left(\int_{[a,y]} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$