Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011
25. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Seien $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, messbar mit $A_k \subseteq A_{k+1}$. Zeigen Sie, dass:

$$v\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sup\{v(A_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ messbar ist.

Aufgabe 3: Sei $A \subseteq [0,1]^2$ messbar mit $v(A) > 0$, und für $y \in [0,1]$ setze $A_y = \{x \mid (x,y) \in A\}$. Weiterhin sei $B \subseteq [0,1]$ mit $v(B) = 1$. Zeigen Sie, dass ein $b \in B$ existiert mit $v(A_b) > 0$.

Aufgabe 4: Sei $f : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass:

$$\int_a^b \left(\int_a^y f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_x^b f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Abgabe bis spätestens 11:30 Uhr am 6. Dezember 2010 im Übungskasten.