LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Andreas Fackler 29. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 5

Aufgabe 1: A ist der Durchschnitt des kompakten Quaders $[0,1]\times[0,1]$ mit dem Urbild von $(-\infty,1]$ unter der stetigen Funktion $x+y$, also abgeschlossen und beschränkt. Damit ist A kompakt.

x^2+y^2 ist stetig, also ist die Funktion über A integrierbar. Für jedes $y\in[0,1]$ ist $A_y = [0,1-y]$ (und für alle anderen y ist $A_y=\emptyset$). Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int_A (x^2+y^2)\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1\int_0^{1-y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}+xy^2\right)\Bigg|_0^{1-y}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1\left(\frac{(1-y)^3}{3}+(1-y)y^2\right)\mathrm{d}y = -\frac{(1-y)^4}{12}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{12}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: B ist der Durchschnitt des kompakten Quaders $[1,2]\times[1,8]\times[0,4]$ mit den Urbildern von $[0,\infty)$ unter den stetigen Funktionen x^3-y und $y-x^2$, also abgeschlossen und beschränkt und damit kompakt. Folglich ist B integrierbar. Für alle $x\in[1,2]$ und $z\in[0,4]$ ist $(B_z)_x=[x^2,x^3]$ (und für alle anderen x und z ist es leer). Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
v(B) &= \int_0^4 v(B_z)\mathrm{d}z = \int_0^4\int_1^2 v((B_z)_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_0^4\int_1^2 v([x^2,x^3])\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\
&= \int_0^4\int_1^2(x^3-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_0^4\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2\mathrm{d}z \\
&= \int_0^4\left(\frac{16-1}{4}-\frac{8-1}{3}\right)\mathrm{d}z = 15-\frac{4\cdot 7}{3}=\frac{17}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Da f stetig ist, ist $C=f^{-1}((0,\infty))$ offen. Außerdem folgt aus $(x,y)\in C$, dass $|x|,|y|<1$, also ist C beschränkt. Damit is f über C integrierbar. Für $y\in(-1,1)$ ist

$C_y = (|y|-1, 1-|y|)$ (sonst leer). Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int_C f\mathrm{d}(x,y) &= \int_{-1}^{1}\int_{C_y} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{|y|-1}^{1-|y|}(1-|x|-|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{1}\left(x(1-|y|)-\frac{x\cdot|x|}{2}\right)\Bigg|_{|y|-1}^{1-|y|}\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left(2(1-|y|)^2-(1-|y|)^2\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{1}(1-|y|)^2\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0}(1+y)^2\mathrm{d}y + \int_{0}^{1}(1-y)^2\mathrm{d}y \\
&= \frac{(1+y)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{0} - \frac{(1-y)^3}{3}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $x\cdot|x|$ differenzierbar ist mit Ableitung $2|x|$. Außerdem haben wir benutzt, dass $\int_{(a,b)} f\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\mathrm{d}x = \int_a^b f\mathrm{d}x$, da $\{a,b\}$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe 4: Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\varphi = \sum_{k=1}^m c_k \cdot \mathbf{1}_{Q_k}$ eine Treppenfunktion auf $[a,b]$ mit $\|\varphi - f\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{2}$, und sei die Darstellung so gewählt, dass die Intervalle Q_k disjunkt sind und ihre Vereinigung $[a,b]$ ist. Dann ist $\sum_{k=1}^m v(Q_k) = b-a$, und für $x \in Q_k$ ist jeweils $c_k - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < c_k + \frac{\varepsilon}{2}$. Also ist G eine Teilmenge von

$$A := \bigcup_{k=1}^m Q_k \times \left[c_k - \frac{\varepsilon}{2}, c_k + \frac{\varepsilon}{2}\right],$$

und insbesondere:

$$\|\mathbf{1}_G\|_1 \le \|\mathbf{1}_A\|_1 = v(A) = \sum_{k=1}^m v(Q_k)\cdot\varepsilon = (b-a)\cdot\varepsilon$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\|\mathbf{1}_G\|_1 = 0$. Damit ist G integrierbar mit Volumen 0.