Andreas Fackler 22. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1: $4x + 5y$ ist stetig und Q kompakt, also ist die Funktion integrierbar. Für $y \in [2,3]$ ist $Q_y = [0,1]$, ansonsten ist $Q_y = \emptyset$. Wir erhalten also:

$$\int_Q (4x+5y)\mathrm{d}(x,y) \quad = \quad \int_2^3 \left(\int_0^1 (4x+5y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_2^3 (2+5y)\mathrm{d}y = 2 + \frac{5}{2}(9-4) = \frac{29}{2}$$

Aufgabe 2: xy ist stetig und K kompakt, also ist xy über K integrierbar. Da $K_y = \emptyset$ für $y \notin [-2,2]$, und $K_y = [-\sqrt{4-x^2}, \sqrt{4-x^2}]$ sonst, gilt:

$$\int_K xy\mathrm{d}(x,y) = \int_{-2}^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xy\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^2 0\mathrm{d}y = 0$$

Aufgabe 3: Als stetige Funktionen auf einer kompakten Menge sind f und g beschränkt. Ist m das Minimum von f und M das Maximum von g, so ist $A \subseteq K \times [m,M]$, also ist A beschränkt. Sei nun $((x_k,t_k)_{k\in\mathbb{N}})$ eine gegen (x,t) konvergente Folge in A. Dann ist wegen der Stetigkeit von f und g:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) \leq \lim_{k\to\infty} t_k = t \\ g(x) &= g\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \lim_{k\to\infty} g(x_k) \geq \lim_{k\to\infty} t_k = t \end{aligned}$$

Also ist auch $(x,t) \in A$ und somit ist A abgeschlossen. Damit haben wir gezeigt, dass A kompakt und somit integrierbar ist. Wir erhalten:

$$v(A) = \int_x v(A_x)\mathrm{d}x = \int_x v([f(x), g(x)])\mathrm{d}x = \int_x (f-g)\mathrm{d}x$$

Aufgabe 4: $h - f \geq 0$ ist integierbar mit Integral 0, also ist auch $\|h-f\|_1 = 0$, das heißt, $h - f$ ist fast überall 0. Nun ist aber $0 \leq g - f \leq h - f$, also ist auch $g - f$ fast überall 0. Insbesondere ist also g fast überall gleich f, und somit haben die beiden Funktionen nach dem Modifikationssatz das gleiche Integral.