Andreas Fackler 15. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1: Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist die Menge $A_n = \{\frac{k}{n} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ aller Brüche mit Nenner n abzählbar, da die Funktion

$$f_n : \mathbb{N} \to A_n, f(k) = \begin{cases} \frac{m}{n} & \text{falls } k = 2m \\ -\frac{l}{n} & \text{falls } k = 2l - 1 \end{cases}$$

surjektiv ist. Als Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist auch $\mathbb{Q}$ abzählbar:

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Aufgabe 2: Nach Aufgabe 1 gibt es ein surjektives $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Dann ist für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$g_N := \max_{0 \leq k \leq N} \mathbf{1}_{\{h(k)\}}$$

als Maximum endlich vieler Treppenfunktionen selbst eine Treppenfunktion und es gilt:

$$0 \leq g_N \leq \sum_{0 \leq k \leq N} \mathbf{1}_{\{h(k)\}}$$

Wegen der Monotonie und Linearität des Integrals folgt hieraus:

$$0 \leq \int g_N \mathrm{d}x \leq \sum_{0 \leq k \leq N} \int \mathbf{1}_{\{h(k)\}} \mathrm{d}x = 0$$

Die g_N bilden also eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit Integral 0, die punktweise gegen f konvergiert. Nach dem kleinen Satz von Levi folgt hieraus, dass f integrierbar ist mit Integral 0.

Jedoch ist f keine Regelfunktion, denn es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, aber auch $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{\sqrt{2}}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, also existiert in 0 der rechtsseitige Limes $\lim_{x\searrow 0} f(x)$ nicht.

Aufgabe 3: Die Folge von Treppenfunktionen

$$g_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \mathbf{1}_{[n,n+1)}$$

wächst monoton und konvergiert punktweise gegen f. Die Integrale

$$\int g_N \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot v([n, n+1)) = \sum_{n=0}^{N} a_n$$

sind durch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ beschränkt. Nach dem kleinen Satz von Levi ist also ihr punktweiser Limes f integrierbar mit Integral

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Aufgabe 4: (Fehler in der Angabe: Für $A = \emptyset$ ist die Aussage natürlich falsch.)

Da A kompakt und f stetig ist, nimmt f sein Minimum $m \in \mathbb{R}$ und Maximum $M \in \mathbb{R}$ auf A an. Dann gilt $m \leq f \leq M$, also wegen der Monotonie des Integrals:

$$m \cdot \int \mathbf{1}_A \mathrm{d}x = \int_A m \mathrm{d}x \leq \int_A f \mathrm{d}x \leq \int_A M \mathrm{d}x = M \cdot \int \mathbf{1}_A \mathrm{d}x$$

Ist $\int \mathbf{1}_A \mathrm{d}x = 0$, so können wir a beliebig wählen. Andernfalls gibt es, da A zusammenhängend ist, nach dem Zwischenwertsatz ein $a \in A$ mit:

$$f(a) = \frac{\int_A f \mathrm{d}x}{\int \mathbf{1}_A \mathrm{d}x}$$