



Prof. Dr. H.-D. Donner

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

15. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

Aufgabe 2: Sei $I = [0, 1]$ und definiere $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f integrierbar aber keine Regelfunktion ist.

Aufgabe 3: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ a_n & \text{falls } n \leq x < n+1 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f integrierbar ist und

$$\int f dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

gilt.

Aufgabe 4: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und kompakt und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass ein $a \in A$ existiert mit:

$$\int_A f dx = f(a) \cdot \int \mathbf{1}_A dx$$

Abgabe bis spätestens 11:30 Uhr am 15. November 2010 im Übungskasten.