Andreas Fackler 9. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1: Seien $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Quader und $c_0, c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{R}^+$, so dass $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathbf{1}_{Q_k}$. Dann sind die $f_N := \sum_{k=0}^{N} c_k \cdot \mathbf{1}_{Q_k}$ Treppenfunktionen und die $\varphi - f_N$ sind Hüllreihen. Insbesondere ist jeweils $\varphi - f_N$ eine Hüllreihe von sich selbst. Es gilt daher:

$$\|\varphi - f_N\|_1 \leq I(\varphi - f_N) = \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k \cdot v(Q_k)$$

Da $I(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot v(Q_k)$ endlich ist, konvergiert dies gegen 0 für $N \to \infty$. Also ist φ integrierbar mit:

$$\int \varphi \mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int f_N \mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} c_k \cdot v(Q_k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot v(Q_k) = I(\varphi)$$

Aufgabe 2: Sei zunächst $g > |f|$ integrierbar. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Hüllreihe φ von g mit $I(\varphi) < \int g \mathrm{d}x + \varepsilon$. Ein solches φ ist dann auch Hüllreihe von f, also folgt $\|f\|_1 \leq I(\varphi) < \int g \mathrm{d}x + \varepsilon$. Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\|f\|_1 \leq \int g \mathrm{d}x$ und damit $\|f\|_1 \leq \inf \left\{ \int g \mathrm{d}x \mid |f| < g, g \text{ integrierbar} \right\}$.

Sei umgekehrt $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es eine Hüllreihe φ von f mit $I(\varphi) < \|f\|_1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Nach Aufgabe 1 ist φ integrierbar mit Integral $I(\varphi)$ und damit ist auch

$$g := \varphi + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(2k)^n \cdot 2^k} \mathbf{1}_{(-k,k)^n}$$

integrierbar mit $\int g \mathrm{d}x = I(\varphi) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(2k)^n \cdot 2^k} \cdot (2k)^n < \|f\|_1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \|f\|_1 + \varepsilon$. Außerdem ist $g > \varphi \geq |f|$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hieraus $\|f\|_1 \geq \inf \left\{ \int g \mathrm{d}x \mid |f| < g, g \text{ integrierbar} \right\}$.

Aufgabe 3: Angenommen, $f \neq 0$, das heißt, es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) \neq 0$. Dann ist $|f(x)| > 0$ und es gibt, da $|f|$ stetig ist, einen offenen Quader $Q \ni x$, so dass $|f(y)| > \frac{|f(x)|}{2}$ für alle $y \in Q$. Das heißt, $|f| \geq \frac{|f(x)|}{2} \cdot \mathbf{1}_Q =: g$. Außerdem haben offene Quader ein positives Volumen, es ist also $\int g \mathrm{d}x > 0$. Sei nun φ eine Hüllkurve von f mit $I(\varphi) < \int g \mathrm{d}x$. Dann gilt $\varphi \geq |f| \geq g$ und nach Aufgabe 1 ist φ integrierbar. Wegen der Monotonie des Integrals folgt

$$I(\varphi) = \int \varphi \mathrm{d}x \geq \int g \mathrm{d}x,$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 4: Mit f_A und f_B ist auch

$$f_{A \cup B} = \max(f_A, f_B)$$

integrierbar