LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Andreas Fackler

8. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Seien $Q_1, \dots, Q_k, P_1, \dots, P_l \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader und $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l \in \mathbb{R}$, so dass

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{1}_{Q_i} \quad \text{und} \quad g = \sum_{j=1}^{l} b_j \mathbf{1}_{P_j}.$$

Dann ist

$$f \cdot g \;=\; \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{1}_{Q_i} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{l} b_j \mathbf{1}_{P_j} \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_i b_j \mathbf{1}_{Q_i} \mathbf{1}_{P_j} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} c_{ij} \mathbf{1}_{R_{ij}},$$

wobei $c_{ij} = a_i b_j$ und $R_{ij} = Q_i \cap P_j$ ist. Als Durchschnitte von Quadern sind die Mengen R_{ij} wieder Quader, also ist damit $f \cdot g$ als Treppenfunktion dargestellt.

Aufgabe 2: Ist $f = 0$, so ist $\|f\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$. (Insbesondere ist auch $f \in \ell^1$.) Sei nun umgekehrt $f \neq 0$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $f(m) \neq 0$, also $|f(m)| > 0$ ist. Dann ist aber $\|f\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |f(k)| \geq |f(m)| > 0$.

Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in \ell^1$. Es gilt $\|\lambda \cdot f\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda \cdot f(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda| \cdot |f(k)| = |\lambda| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} f(k)| = |\lambda| \cdot \|f\|_1$. (Insbesondere ist auch $\lambda f \in \ell^1$.)

Es bleibt das dritte Normaxiom, die Dreiecksungleichung, zu zeigen: Seien $f, g \in \ell^1$. Dann gilt:

$$\|f + g\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |f(k) + g(k)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} (|f(k)| + |g(k)|) = \sum_{k=0}^{\infty} |f(k)| + \sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

(Insbesondere ist auch $f + g \in \ell^1$ – womit bewiesen ist, dass ℓ^1 tatsächlich ein Untervektorraum des Raumes aller Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist.)

Aufgabe 3: Sei $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in ℓ^1 bezüglich $\|\|_1$. Da $|f_m(l) - f_{m'}(l)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_m(k) - f_{m'}(k)| = \|f_m - f_{m'}\|_1$ für jedes $l \in \mathbb{N}$, ist jeweils auch $(f_m(l))_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, und wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ konvergiert diese. Setze $g(l) = \lim_{m \to \infty} f_m(l)$. Wir zeigen, dass $g \in \ell^1$ ist, und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gegen g konvergiert.

Es bleibt zu zeigen, dass f_m nicht nur punktweise, sondern auch in $\|\|_1$ gegen g konvergiert, dass also $\lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |g(k) - f_m(k)| = 0$ ist. (Daraus folgt dann $g - f_m \in \ell^1$ für fast alle m, also wegen $g = (g - f_m) + f_m$ insbesondere auch, dass $g \in \ell^1$ ist.)

Sei hierzu $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m_1, m_2 \geq M$ gilt: $\|f_{m_1} - f_{m_2}\|_1 < \varepsilon$. Dann gilt für jede Partialsumme und jedes $m_1 \geq M$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} |g(k) - f_{m_1}(k)| &= \sum_{k=0}^{N} |\lim_{m_2 \to \infty} f_{m_2}(k) - f_{m_1}(k)| \\
&= \lim_{m_2 \to \infty} \sum_{k=0}^{N} |f_{m_2}(k) - f_{m_1}(k)| \leq \lim_{m_2 \to \infty} \|f_{m_2} - f_{m_1}\|_1 \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Es folgt $\|g - f_{m_1}\|_1 \leq \varepsilon$.

Aufgabe 4: Seien $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Quader und $c_0, c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{R}^+$, so dass $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathbf{1}_{Q_k}$. Sei $x \in A$, das heißt, $a < \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathbf{1}_{Q_k}(x)$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass bereits für die N-te Partialsumme gilt:

$$a < \sum_{k=0}^{N} c_k \cdot \mathbf{1}_{Q_k}(x)$$

Sei U der Durchschnitt aller Q_k mit $0 \leq k \leq N$ und $x \in Q_k$. Dann gilt für alle $y \in U$:

$$\varphi(y) \geq \sum_{k=0}^{N} c_k \cdot \mathbf{1}_{Q_k}(y) \geq \sum_{k=0}^{N} c_k \cdot \mathbf{1}_{Q_k}(x) > a,$$

also $y \in A$. Da die Q_k offen sind, ist U ebenfalls offen, also ist U eine offene Umgebung von x mit $U \subseteq A$. Damit ist gezeigt, dass A offen ist.