LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Andreas Fackler 14. Februar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Lösungsvorschlag zur zweiten Probeklausur (Blatt 12)

Aufgabe 1: In beiden Fällen sind beschränkte stetige Funktionen auf offenen Mengen gegeben; diese sind also integrierbar:

$$\textbf{(a)} \quad \int_U (1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-s^2)\cdot s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (s-s^3)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\pi\left(\frac{s^2}{2}-\frac{s^4}{4}\bigg|_0^1\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\textbf{(b)} \quad \int_U 2xye^{\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2s^2\cos t\sin t e^{\frac{s^2(\sin t)^2}{s^2}}\,s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{s^4}{4}\bigg|_0^1 \cdot 2\cos t\sin t e^{(\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} 2\cos t\sin t e^{(\sin t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\,e^{(\sin t)^2}\bigg|_0^{2\pi} = 0$$

Aufgabe 2: Wir wenden die Substitutionsregel mit $t = h(s)$ an, sowie die Kettenregel für $\sigma\circ h$:

$$\int_\sigma \omega = \int_{\tilde a}^{\tilde b} \omega(\sigma(t))\sigma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \omega(\sigma(h(s)))\sigma'(h(s))h'(s)\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_a^b \omega(\sigma\circ h(s))(\sigma\circ h)'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\sigma\circ h}\omega$$

Aufgabe 3: **(a)** Es gibt keine Stammfunktion, da die 1-Form nicht geschlossen ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(x^2y) = x^2 \neq 1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x$$

(b) Diese 1-Form ist geschlossen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{1}{1+e^{y-x}} = -\frac{e^{y-x}}{(1+e^{y-x})^2} = -\frac{e^{x-y}\cdot(e^{y-x})^2}{(1+e^{x-y})^2\cdot(e^{y-x})^2} = -\frac{e^{x-y}}{(1+e^{x-y})^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+e^{x-y}};$$

also hat sie eine Stammfunktion. Wir berechnen diejenige Stammfunktion F mit $F(0,0) = 0$ durch Integration entlang der Strecke $\gamma_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma_{x,y}(t) = (xt, yt)$ von $(0,0)$ nach (x,y):

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{\gamma_{x,y}} \left(\frac{1}{1+e^{v-u}} \,\mathrm{d}u + \frac{1}{1+e^{u-v}} \,\mathrm{d}v \right) = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^{(y-x)t}} x + \frac{1}{1+e^{(x-y)t}} y \right) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{xe^{xt} + ye^{yt}}{e^{xt} + e^{yt}} \,\mathrm{d}t = \ln \left(e^{xt} + e^{yt} \right) \Big|_0^1 = \ln(e^x + e^y) - \ln 2 = \ln \frac{e^x + e^y}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 4: **(a)** Setze etwa $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \sin t(-\sin t) \,\mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi} (\sin t)^2 \,\mathrm{d}t < 0$$

Das Integral über $(\sin t)^2$ ist positiv, da $(\sin t)^2 \geq 0$, aber nicht konstant null ist.

(b) Setze etwa $f(x,y) = y$. Dann ist xy eine Stammfunktion, denn:

$$d(xy) = y \,\mathrm{d}x + x \,\mathrm{d}y$$