Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011
31. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Blatt 12: zweite Probeklausur

Aufgabe 1: Sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$. Bestimmen Sie die folgenden Integrale (Tipp: Polarkoordinaten!):

$$\textbf{(a)} \qquad \int_U (1 - x^2 - y^2) \, \mathrm{d}(x,y)$$

$$\textbf{(b)} \qquad \int_U 2xye^{\frac{y^2}{x^2+y^2}} \, \mathrm{d}(x,y)$$

Aufgabe 2: Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ eine stetig differenzierbare 1-Form. Seien $a, b, \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\tilde{a} < \tilde{b}$, und $h : [a,b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$ stetig differenzierbar mit $h(a) = \tilde{a}$ und $h(b) = \tilde{b}$. Sei $\sigma : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Zeigen Sie:

$$\int_\sigma \omega \, \mathrm{d}x = \int_{\sigma \circ h} \omega \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie eine Stammfunktion oder beweisen Sie, dass es keine gibt:

$$\textbf{(a)} \qquad x^2 y \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y \ \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$$

$$\textbf{(b)} \qquad \frac{1}{1 + e^{y-x}} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{1 + e^{x-y}} \, \mathrm{d}y \ \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$$

Aufgabe 4: Betrachte die 1-Form $\omega = y \, \mathrm{d}x : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)^*$.
(a) Finden Sie eine geschlossene Kurve γ, so dass gilt:

$$\int_\gamma \omega \neq 0$$

(b) Finden Sie ein stetiges $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass die 1-Form $\omega + f \, \mathrm{d}y$ eine Stammfunktion hat.

Abgabe bis spätestens 11:30 Uhr am 31. Januar 2011 im Übungskasten.