LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Andreas Fackler 25. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 11

Aufgabe 1: In Aufgabe 1 von Tutorium 10 wurde gezeigt, dass es eine geschlossene Kurve γ gibt mit $\int_\gamma \omega = 2\pi$, also besitzt ω keine Stammfunktion. ω ist aber geschlossen, denn:

$$\begin{aligned} D_y \frac{-y}{x^2+y^2} &= \frac{-1\cdot(x^2+y^2)-(-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ D_x \frac{x}{x^2+y^2} &= \frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Da die Abbildungsnorm von $\omega(\gamma(t))$ für alle t durch K beschränkt ist, gilt:

$$\begin{aligned} \left|\int_\gamma \omega\right| &= \left|\int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |\omega(\gamma(t))(\gamma'(t))|\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_a^b \|\omega(\gamma(t))\|\cdot\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t \le \int_a^b K\cdot\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = K\cdot L \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Angenommen, A wäre nicht zusammenhängend. Dann gibt es disjunkte offene Mengen U und V mit $A \subseteq U\cup V$ und $A\cap U \neq \emptyset$ und $A\cap V\neq\emptyset$. Sei also $c\in A\cap U$ und $d\in A\cap V$. Nach Voraussetzung gibt es eine stetige Funktion $\gamma:[0,1]\to A$ mit $\gamma(0)=c$ und $\gamma(1)=d$. Als Urbilder offener Mengen sind dann $X=\gamma^{-1}(U)$ und $Y=\gamma^{-1}(V)$ offen in $[0,1]$. Da aber $A\subseteq U\cup V$ ist, ist $[0,1]=X\cup Y$. Da U und V disjunkt sind, sind auch ihre Urbilder X und Y disjunkt. Außerdem ist $0\in X$ und $1\in Y$. Also sind X und Y nichtleere disjunkte offene Mengen, deren Vereinigung $[0,1]$ ist. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass Intervalle zusammenhängend sind.

Aufgabe 4: Da γ stetig differenzierbar ist, ist $\gamma': I\to\mathbb{R}^n$ stetig und damit beschränkt. Sei also $c\in\mathbb{R}$, so dass $\|\gamma'(t)\|\le c$ für alle $t\in I$.

Sei $K\ge 1$ eine natürliche Zahl. Für jedes $k\in\{0,\dots,K\}$ setze $s_k = a+\frac{k}{K}(b-a)$. Dann bilden die $[s_{k-1},s_k]$ mit $1\le k\le K$ eine Unterteilung von I in Intervalle der Länge $\frac{b-a}{K}$. Für jedes $t\in[s_{k-1},s_k]$ is $t-s_k\le\frac{b-a}{K}$, also:

$$\|\gamma(t)-\gamma(s_k)\| = \left\|\int_t^{s_k}\gamma'(r)\,\mathrm{d}r\right\| \le \int_{s_k}^t \|\gamma'(r)\|\,\mathrm{d}r \le |t-s_k|\cdot c \le \frac{c(b-a)}{K}$$

Insbesondere ist also $\gamma[[s_{k-1}, s_k]]$ in einem Würfel W_k mit Seitenlänge $\frac{c(b-a)}{K}$ enthalten. $\gamma[I]$ ist folglich Teilmenge der Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{K} W_k$. Es ist aber

$$v\left(\bigcup_{k=1}^{K} W_k\right) \leq \sum_{k=1}^{K} v(W_k) = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{c(b-a)}{K}\right)^n = \frac{c^n(b-a)^n}{K^{n-1}}$$

Für $K \to \infty$ konvergiert dies wegen $n \geq 2$ gegen 0. Daraus folgt, dass $\gamma[I]$ eine Nullmenge ist.