Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011
13. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Übungsblatt 11

Aufgabe 1: Sei $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, und sei ω die 1-Form auf U definiert durch:

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

Zeigen Sie, dass ω geschlossen ist aber keine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 2: Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ω eine stetige 1-Form auf U und $\gamma : [a,b] \to U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Setze

$$K = \sup\{\|\omega(\gamma(t))\| \mid a \leq t \leq b\}$$

und sei L die Länge von γ.
Zeigen Sie, dass $|\int_\gamma \omega| \leq K \cdot L$.

Aufgabe 3: Seien X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Für alle $c, d \in A$ existiere eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to A$ mit $\gamma(0) = c$ und $\gamma(1) = d$. Zeigen Sie, dass A zusammenhängend ist.

Aufgabe 4: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und setze $I = [a,b]$. Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, eine stetig differenzierbare Kurve. Zeigen Sie, dass $\gamma[I]$ eine Nullmenge ist.

Abgabe bis spätestens 11:30 Uhr am 24. Januar 2011 im Übungskasten.