Andreas Fackler 6. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 10

Aufgabe 1:

$$\int_\gamma y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 t^2 1 + t\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 3t^2\,\mathrm{d}t = 1$$

Aufgabe 2:

$$\int_\gamma x^2\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y = \int_0^1 4t^2\cdot 2 + 16t^2\cdot 4\,\mathrm{d}t = \int_0^1 72t^2\,\mathrm{d}t = 24$$

Aufgabe 3:

$$\begin{aligned}\int_\gamma e^x\,\mathrm{d}x + e^y\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 e^{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}} + e^t\cdot 1\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + e - 1\\ &= \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{1}} e^s\,\mathrm{d}s + e - 1 = 2e - 2\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Für gegebenes $a, b \in \mathbb{R}^2$ sei $\gamma_{a,b} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma_{a,b}(t) = (ta, tb)$. Setze

$$\begin{aligned}f(a,b) &= \int_{\gamma_{a,b}} (12xy+3)\,\mathrm{d}x + 6x^2\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 ((12t^2ab+3)a + 6t^2a^2b)\,\mathrm{d}t = 4a^2b + 3a + 2a^2b = 6a^2b + 3a\end{aligned}$$

Und tatsächlich:

$$df(x,y) = (12xy+3)\,\mathrm{d}x + 6x^2\,\mathrm{d}y$$