Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen - Vorlesung Prof. Dr. Hans-Dieter Donder

Martin Winter

10. Februar 2011

Zusammenfassung

Mitschrift zur Vorlesung Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
3. Fachsemester Bachelor Mathematik WiSe 10/11

Inhaltsverzeichnis

§16 Das Lebesgue-Integral im $\mathbb{R}^n$

Definition

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Q ist ein Quader, wenn es beschränkte Intervalle $I_1, \dots, I_n$ gibt mit

$$Q = I_1 \times \dots \times I_n$$

Lemma 1

Seien $Q_1, \dots, Q_k \subseteq \mathbb{R}^k$ Quader.
Dann gibt es nichtleere paarweise disjunkte Quader $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{R}^m$ mit

(1) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} Q_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m} P_j$

(2) $P_j \cap Q_i = \emptyset$ oder $P_j \subseteq Q_i$ für $\begin{matrix} 1 \leq j \leq m, \\ 1 \leq i \leq k \end{matrix}$

Beweis:
durch Induktion über n.

□

Definition

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Wir definieren das Volumen $v(Q)$ von Q wie folgt:
Ist I ein beschränktes Intervall mit linkem Randpunkt a und rechtem Randpunkt b, so setze

$$v(I) = b - a$$

Ist $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ mit $I_1, \dots, I_n$ beschränkte Intervalle, so setze

$$v(Q) = v(I_1) \cdot v(I_2) \cdot \dots \cdot v(I_n)$$

Ist Q wie oben, so schreibe manchmal auch $v_n(Q)$ für $v(Q)$

Lemma 2

Seien $Q_1, \dots, Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$ paarweise disjunkte Quader, und sei $Q = \bigcup\limits_{i=1}^{k} Q_i$.

Ist Q ein Quader, so gilt $v(Q) = \sum\limits_{i=1}^{k} v(Q_i)$

Definition

Für eine Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ definieren wir die charakteristische Funktion 1_A von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ durch

$$1_A = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$

Es gilt also für $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$1_{A\cup B} = \max\{1_A, 1_B\}$$
$$1_{A\cap B} = \min\{1_A, 1_B\}$$
$$1_{A\setminus B} = \max\{0, 1_A - 1_B\}$$

Definition

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. f ist eine Treppenfunktion, wenn es Quader $Q_1, \dots, Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ gibt mit $f = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \cdot 1_{Q_i}$

Aus der Definition folgt unmittelbar:
Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen und $a \in \mathbb{R}$, so sind auch $f + g$ und $a \cdot f$ wieder Treppenfunktionen. Die Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ bilden also einen Vektorraum.

Sei nun $f = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i 1_{Q_i}$ eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$. Wir möchten das Integral von f definieren durch

$$\int f \, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} a_i v(Q_i)$$

Hierzu müssen wir zeigen, dass dieser Wert unabhängig von der speziellen Darstellung von f ist, die natürlich nicht eindeutig ist. Sei also $f = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j 1_{P_j}$ eine weitere solche Darstellung von f. Wir müssen zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot v(Q_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot v(P_j)$$

Durch Hinzufügen von Summanden der Form $0 \cdot 1_Q$ können wir o.E. annehmen, dass $k = m$ udn $Q_i = P_i$. Nach Lemma 1gibt es paarweise disjunkte Quader $S_1, \dots, S_l \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

(1) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} Q_i = \bigcup\limits_{j=1}^{l} S_j$ und

(2) $S_j \cap Q_i = \emptyset$ oder $S_j \subseteq Q_i$ für $1 \leq j \leq l, 1 \leq i \leq k$

Für $1 \leq j \leq l$ setze $B_j = \{i \mid S_j \subseteq Q_i\}$ und $c_j = \sum\limits_{i \in B_j} a_i$. Wegen (2) ist dann für alle $x \in S_j \qquad f(x) = c_j$. Setze nun für $1 \leq i \leq k \qquad A_i = \{j \mid S_j \subseteq Q_i\}$. Wegen (1) und (2) also $Q_i = \bigcup_{j \in A_i} S_j$.

Nach Lemma 2 gilt also $v(Q_i) = \sum_{j \in A_i} v(S_j)$. Somit folgt $\sum_{i=1}^{k} a_i v(Q_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j \in A_i}^{v} (S_j) = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i \in B_j} a_i \right) \cdot v(S_j) = \sum_{j=1}^{l} c_j v(S_j)$.

Analog folgt $\sum_{i=1}^{k} b_i \cdot v(Q_i) = \sum_{j=1}^{l} c_j \cdot v(S_j)$. Somit können wir dass Integral von Treppenfunktionen wie oben definieren.

21. Oktober 2010

Satz 3

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen, $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(1) $\int (f+g) \, dx = \int f \, dx + \int g \, dx$

(2) $\int cf \, dx = c \cdot \int f \, dx$

(3) Falls $f \leq g$, so $\int f \, dx \leq \int g \, dx$

(1), (2): Linearität, (3): Monotonie

Beweis:
(1), (2) folgen aus der Definition

zu (3):
Wie oben finden wir mit Lemma 1 paarweise disjunkte, nichtleere Quader $Q_1, \dots, Q_k$ und $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ mit $f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{Q_i}$ und $g = \sum_{i=1}^{k} b_i 1_{Q_i}$
Ist dann $f \leq g$, so $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \dots, k$, also $\int f \, dx \leq \int g \, dx$ □

Bemerkung:
Ist Q ein Quader, so ist $v(Q) = \int 1_Q \, dx$

Bemerkung:
Ist f eine Treppenfunktion, so ist auch $|f|$ eine Treppenfunktion, und es gilt

$$\left| \int f \, dx \right| \leq \int |f| \, dx$$

Beweis:
Sei f eine Treppenfunktion aus $\mathbb{R}^n$. Dann existieren paarweise disjunkte Quader $Q_1, \dots, Q_k \in \mathbb{R}^n$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ mit $f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{Q_i}$. Dann ist aber $|f| = \sum_{i=1}^{k} |a_i| 1_{Q_i}$, also eine Treppenfunktion. Der Rest folgt aus Monotonie und Linearität wegen $f, -f \leq |f|$. □

zur Erinnerung: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$

Aus technischen Gründen betrachten wir im Folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\overline{\mathbb{R}}$. Wie wir mit ∞ und $-\infty$ rechnen, wird keine wesentliche Rolle spielen. Es sei deshalb einfach auf irgendeine sinnvolle Weise fortgesetzt.

Konvention

„Funktion auf $\mathbb{R}^n$ " bedeutet im Folgenden „Funktion von $\mathbb{R}^n$ nach $\overline{\mathbb{R}}$ "

Definition

Sei $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$. Eine Hüllreihe von f ist eine Reihe der Form $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k}$ mit den Eigenschaften:

(1) Die Q_k sind offene Quader im $\mathbb{R}^n$ und $c_k \in \mathbb{R}^+$

(2) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|f(x)| \leq \varphi(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k}(x)$$

Weiterhin setze $I(\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k v(Q_k)$ (Inhalt von φ).

Bemerkung:

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $Q_k = (-k, k)^n$. Dann ist für jedes $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 1_{Q_k}$ eine Hüllreihe von f.

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Wir definieren die

L^1-Halbnorm von f durch

$$||f||_1 = \inf\{I(\varphi) \mid \varphi \text{ ist Hüllenreihe von } f\}$$

Offenbar gilt: Falls $|f| \leq |g|$, so $||f||_1 \leq ||g||_1$

$||\ ||_1$ ist eine Halbnorm, d.h. $||f||_1 \geq 0$, und es gilt für $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, c \in \mathbb{R}$

$$\text{(N2)} \qquad ||cf||_1 = |c| \cdot ||f||_1$$

$$\text{(N3)} \quad ||f + g||_1 \leq ||f||_1 + ||g||_1$$

Der Beweis von (N2) ist offensichtlich. Wegen $|f + g| \leq |f| + |g|$ folgt (N3) aus dem folgenden Lemma:

Lemma 4

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}^+$. Dann gilt: $\left|\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k\right|\right|_1 \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} ||f_k||_1$

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wähle eine Hüllreihe $\varphi_k = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_{ki} 1_{Q_{ki}}$ von f_k mit

$$I(\varphi_k) \leq ||f_k||_1 + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Setze $\varphi = \sum\limits_{k,i=0}^{\infty} c_{ki} 1_{Q_{ki}}$. Dann ist φ eine Hüllreihe von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ mit

$$I(\varphi) = \sum_{k,i=0}^{\infty} c_{ki} v(Q_{ki}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_{ki} v(Q_{ki}) \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||f||_k + 2\varepsilon$$

Wegen $\left|\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k\right|\right|_1 \leq I(\varphi)$ folgt hieraus mit $\varepsilon \to 0$ die Behauptung.

□

Lemma 5

Sei A ein abgeschlossener Quader. Dann gilt

$$||1_A||_1 = v(A) \left(= \int 1_A \, \mathrm{d}x \right)$$

Beweis:

„$\leq$“ Sei Q ein offener Quader mit $A \subseteq Q$. Dann ist 1_Q eine Hüllreihe von 1_A, also nach Definition

$$||1_A||_1 \leq I(1_Q) = v(Q)$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert aber ein derartiges Q mit $v(Q) \leq v(A) + \varepsilon$.

„$\geq$“ Sei $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k}$ eine Hüllreihe von 1_A. Wir müssen zeigen, dass $v(A) \leq I(\varphi)$. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in A$ gibt es wegen $\varphi(x) \geq 1$ ein $m(x) \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=0}^{m(x)} c_k 1_{Q_k}(x) \geq 1 - \varepsilon$$

Da die Q_k offen sind gilt dies dann für alle $z \in U(x)$ für eine offene Umgebung $U(x)$ von x. Dann ist $\{U(x) \mid x \in A\}$ eine offene Überdeckung von A.
Da A abgeschlossen und beschränkt, also kompakt ist, gibt es aber endlich viele $x_1, \ldots, x_p \in A$ mit $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{p} U(x_i)$. Setze nun $m = \max\{m(x_1), \ldots, m(x_p)\}$. Somit erhalten wir mit Satz 3

$$I(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v(Q_k) \geq \sum_{k=0}^{m} c_k v(Q_k) \geq (1 - \varepsilon) v(A)$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

□

Wir verstärken Lemma 5 zu

Lemma 6

Für jede Treppenfunktion f gilt

$$||f||_1 = \int |f| \ \mathrm{d}x$$

Beweis:

Wegen $||f||_1 = || \ |f| \ ||_1$ können wir o.E. $f \geq 0$ annehmen. Nach Lemma 1,2 existieren paarweise disjunkte Quader $Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_r$ mit $Q_1, \dots, Q_s$ offen, $v(P_1) = \dots = v(P_r) = 0$ und $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_r \in \mathbb{R}$ mit

$$f = \sum_{k=1}^{s} c_k 1_{Q_k} + \sum_{i=1}^{r} d_i 1_{P_i}$$

Wegen $f = 0$ sind $c_k, d_i \geq 0$.

„≤" Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $1 \leq i \leq r$. Wähle einen offenen Quader P_i^* mit $P_i \subseteq P_i^*$ und $v(P_i^*) \leq \varepsilon$. Da ist $\pi := \sum\limits_{k=1}^{s} c_k 1_{Q_k} + \sum\limits_{i=1}^{r} d_i 1_{P_i^*}$ eine Hüllreihe von f. Also

$$||f||_1 \leq I(\pi) \leq \sum_{k=1}^{s} c_k v(Q_k) + \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{r} d_i$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt hieraus

$$||f||_1 \leq \sum_{k=1}^{s} c_k v(Q_k) = \int f \ \mathrm{d}x$$

„≥" Sei A ein abgeschlossener Quader mit $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Weiterhin sei m das Maximum der Werte von f. Dann ist $g : m \cdot 1_A - f \geq 0$ und eine Treppenfunktion. Somit nach „≤"und mit Lemma 5 erhält man

$$\int f \ \mathrm{d}x = \int (m \cdot 1_A - g) \ \mathrm{d}x = m \cdot \int 1_A \ \mathrm{d}x - \int g \ \mathrm{d}x \leq m \cdot v(A) - ||g||_1 \overset{L.5}{=}$$
$$= ||f + g||_1 - ||g||_1 \leq ||f||_1$$

□

Definition

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$.
f ist (Lebesgue-) integrierbar, wenn es eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ gibt mit $\lim\limits_{k \to \infty} ||f - f_k||_1 = 0$. Wir wollen das Integral von f definieren durch

$$\int f \ \mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int f_k \ \mathrm{d}x$$

Hierzu müssen wir zeigen

(1) $\left(\int f_k \, \mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}x$ hängt nicht von der gewählten Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ab.

zu (1) $\int f_k \, \mathrm{d}x$ ist eine Cauchyfolge, denn:

$$\left|\int f_k \, \mathrm{d}x - \int f_m \, \mathrm{d}x\right| \leq \int |f_k - f_m| \, \mathrm{d}x \overset{L.6}{=} ||f_k - f_m||_1 \leq ||f_k - f||_1 + ||f - f_m||_1$$

zu (2) Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{k\to\infty} ||f - g_k||_1 = 0$.
Dann gilt:

$$\left|\int f_k \, \mathrm{d}x - \int g_k \, \mathrm{d}x\right| \leq \int |f_k - g_k| \, \mathrm{d}x \overset{L.6}{=} ||f_k - g_k||_1 \leq ||f_k - f||_1 + ||f - g_k||_1$$

Also $\lim\limits_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int g_k \, \mathrm{d}x$

Also können wir das Integral von f wie oben definieren. Für Treppenfunktionen stimmt diese Definition natürlich mit der früheren überein.

Satz 7

Ist f integrierbar, so ist auch $|f|$ integrierbar, und es gilt

$$\int |f| \, \mathrm{d}x = ||f||_1$$

Beweis:
Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{k\to\infty} ||f - f_k||_1 = 0$. Wegen $||f| - |f_k|| \leq |f - f_k|$ folgt $|||f| - |f_k|||_1 \leq ||f - f_k||_1$ und daher $\lim\limits_{k\to\infty} |||f| - |f_k|||_1 = 0$. Also ist $|f|$ integrierbar, und es gilt $\int |f| \, \mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int |f_k| \, \mathrm{d}x$.
Nun ist für ein $k \in \mathbb{N}$

$$||f_k||_1 - ||f - f_k||_1 \leq ||f||_1 \leq ||f_k||_1 + ||f - f_k||_1$$

Mit $k \to \infty$ folgt hieraus wegen $||f_k||_1 = \int |f_k| \, \mathrm{d}x$

$$\int |f| \, \mathrm{d}x \leq ||f||_1 \leq \int |f| \, \mathrm{d}x$$

□

Satz 8

Seien f, g integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(a) $f + g$ ist integrierbar, und es gilt

$$\int (f+g)\ \mathrm{d}x = \int f\ \mathrm{d}x + \int g\ \mathrm{d}x$$

(b) cf ist integrierbar, und es gilt

$$\int cf\ \mathrm{d}x = c \int f\ \mathrm{d}x$$

(c) Ist $f \leq g$, so ist $\int f\ \mathrm{d}x \leq \int g\ \mathrm{d}x$

(a), (b) $\Rightarrow$ Linearität, (c) $\Rightarrow$ Monotonie

Beweis:
Seien $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}, (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen von Treppenfunktionen mit

$$\lim_{k\to\infty} ||f - f_k||_1 = 0 = \lim_{k\to\infty} ||g - g_k||_1.$$

zu (a) Wegen $||(f+g) - (f_k + g_k)||_1 \leq ||f - f_k||_1 + ||g - g_k||_1$ ist auch $\lim\limits_{k\to\infty} ||(f+g) - (f_k + g_k)||_1 = 0$.
Daher ist $f + g$ integrierbar, und es gilt

$$\int (f+g)\ \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int (f_k + g_k)\ \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k\ \mathrm{d}x + \lim_{k\to\infty} \int g_k\ \mathrm{d}x = \int f\ \mathrm{d}x + \int g\ \mathrm{d}x$$

zu (b) Wegen $||cf - cf_k||_1 = |c| \cdot ||f - f_k||$ ist auch $\lim\limits_{k\to\infty} ||cf - cf_k||_1 = 0$.
Daher ist cf integrierbar und es gilt

$$\int cf\ \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} c \cdot \lim_{k\to\infty} \int f_k\ \mathrm{d}x = c \cdot \int f\ \mathrm{d}x$$

zu (c) Sei $f \leq g$. Dann ist $g - f \geq 0$.
Nach (a), (b) ist $g - f$ integrierbar.
Also nach Satz 7

$$\int (g - f)\ \mathrm{d}x = ||g - f||_1 \geq 0$$

Somit nach (a), (b)

$$\int f\ \mathrm{d}x \leq \int g\ \mathrm{d}x$$

□

In Lemma 4 ist die Voraussetzung $f_k \geq 0$ nicht notwendig, denn:

$$\left|\left|\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right|\right|_1 \leq \left|\left|\,\left|\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right|\,\right|\right|_1 \leq \left|\left|\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|\right|\right|_1 \overset{|f_k|\geq 0}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} ||\ |f_k|\ ||_1 = \sum_{k=0}^{\infty} ||f_k||_1$$

Satz 9

Seien f, g integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Weiterhin sei g beschränkt. Dann ist auch $f \cdot g$ integrierbar.

Beweis:
Wir zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion h gibt mit $||f \cdot g - h||_1 \leq \varepsilon$. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Wähle $c > 0$ mit $|g| \leq c$. Sei dann h_0 eine Treppenfunktion mit $||f - h_0||_1 \leq \frac{\varepsilon}{2c}$. Wähle $d > 0$ mit $|h_0| \leq d$. Dann existiert eine Treppenfunktion h_1 mit $||g - h_1||_1 \leq \frac{\varepsilon}{2c}$. Wegen $|f \cdot g - h_0 \cdot h_1| \leq |f - h_0| \cdot |g| + |h_0| \cdot |g - h_1|$ folgt:

$$||fg - h_0 h_1||_1 \leq c \cdot ||f - h_0||_1 + d \cdot ||g - h_1||_1 \leq \varepsilon$$

Aber $h_0 h_1$ ist eine Treppenfunktion

$\square$

Bemerkung:
Seien f, g integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Dann sind auch

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \text{ und}$$

$$\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

integrierbar.

Also erhält man folgendes:
Sei f eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$ und setze $f^+ = \max(f, 0)$ und $f^- = \max(-f, 0)$. Dann sind $f^+, f^- \geq 0, f = f^+ - f^-$ und wegen oben ist f genau dann integrierbar, wenn f^+ und f^- integrierbar sind. Sei nun $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $A \in D$. Wir definieren dann $f_A : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, falls } x \in A \\ 0 & \text{, falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$

f heißt über A integrierbar, falls f_A integrierbar ist. Wir setzen dann

$$\int_A f \, \mathrm{d}x = \int f_A \, \mathrm{d}x$$

Dies ist das Integral von f über A.
Ist $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, so ist f integrierbar, wenn f über A integrierbar ist.

Dieses verhält sich natürlich auch linear und monoton.
Wir können nun den Zusammenhang mit dem Integral für Regelfunktionen herstellen:

Satz 10

Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann ist f über I integrierbar und es gilt:

$$\int_I f \, \mathrm{d}x = \int_a^b f \, \mathrm{d}x$$

Beweis:
Ist $h : I \to \mathbb{R}$, so gilt $|h_I| \leq \underbrace{||h||}_{Supremumsnorm} \cdot 1_I$. Also erhält man

$$(*) \quad ||h_I||_1 \leq ||h|| \cdot ||1_I||_1$$

Sei also $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit

$$\lim_{k \to \infty} ||f - f_k|| = 0$$

Dann ist $f_{k,I}$ eine Treppenfunktion (im neuen Sinn) und nach $(*)$ ist $\lim\limits_{k \to \infty} ||f_I - f_{k,I}||_1 = 0$. Somit ist f_I integrierbar und es gilt:

$$\int_I f \, \mathrm{d}x = \int f_I \, \mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int f_{k,I} \, \mathrm{d}x \underset{Def.}{=} \lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k \, \mathrm{d}x = \int_a^b f \, \mathrm{d}x$$

□

Wir wollen nun zeigen, dass für stetige $f : A \to \mathbb{R}$ mit „gutem“ A integrierbar ist.

Definition

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen von D nach $\overline{\mathbb{R}}$. $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend (bzw. monoton fallend), wenn $f_k \leq f_{k+1}$ (bzw. $f_{k+1} \leq f_k$) für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 11 (kleiner Satz von Levi)

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende oder fallende Folge von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ derart, dass die Folge $\left(\int f_k \, \mathrm{d}x\right)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Definiere $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ durch $f(x) = \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x)$. Dann ist f integrierbar und es gilt:

$$\int f \, \mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int f_k \, \mathrm{d}x$$

Beweis:
Wie üblich genügt es, den Fall zu betrachten, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $f - f_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty}(f_{i+1} - f_i)$.
Nach Lemma 4 gilt also:

$$(*) \quad ||f - f_k||_1 \leq \sum_{i=k}^{\infty} ||f_{i+1} - f_i||_1 \underset{L.6}{=} \sum_{i=k}^{\infty} \left(\int f_{i+1} \, \mathrm{d}x - \int f_i \, \mathrm{d}x \right)$$

Die Folge $\left(\int f_k \, \mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und nach Voraussetzung beschränkt. Somit ist sie konvergent.
Sei also $a = \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k \, dx$. Nach $(*)$ ist dann für $k \in \mathbb{N}$ $\quad ||f - f_k||_1 \leq a - \int f_k \, dx$. Also ist $\lim\limits_{k\to\infty} ||f - f_k||_1 = 0$. Hieraus folgt die Behauptung.

□

Lemma 12

Seien $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subseteq U$. Weiterhin sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig mit $f \geq 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Treppenfunktionen $g, h \geq 0$ mit

(1) $f(x) \leq g(x) \leq f(x) + \varepsilon \quad \forall x \in K$

(2) $f(x) - \varepsilon \leq h(x) \leq f(x) \quad \forall x \in K$

(3) $g(x) = h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus U$

2. November 2010

Beweis:
Da K kompakt ist, ist f sogar gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(a) - f(b)| \leq \varepsilon$ für alle $a, b \in K$ mit $||a - b||_\infty \leq \delta$ ($||\cdot||_\infty$ Maximumsnorm).
Für jedes $x \in K$ wähle einen offenen Quader $Q(x)$ mit $x \in Q(x) \subseteq U$ und Kantenlänge $\leq \delta$. Dann ist $U = \{Q(x) \mid x \in K\}$ eine offene Überdeckung von K. Also wegen K kompakt existieren $x_1, \ldots, x_m \in K$ mit $K \subseteq Q(x_1) \cup \cdots \cup Q(x_m)$. Setze $Q_i = Q(x_i)$ und weiterhin sei $c_i = \sup f[Q_i], d_i = \inf f[Q_i]$. Hiermit definiere dann

$$g = \max(c_1 1_{Q_1}, \ldots, c_m 1_{Q_m}), h = \min(d_1 1_{Q_1}, \ldots, d_m 1_{Q_m})$$

Dann sind g, h wie gewünscht.

□

Definition

Sei A eine Menge. A ist abzählbar, wenn $A = \emptyset$ oder es existiert eine surjektive Abbildung $F : \mathbb{N} \to A$.

Bemerkung:
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abzählbaren Mengen. Dann ist $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ abzählbar.

Beweis:

o.E. sei $A_n \neq \emptyset$. Sei also $A_n = \{a_{nk} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Man erhält Abzählungen von $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{00} & & a_{01} & \to & a_{02} & & a_{03} & \to & a_{04} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_{10} & & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
a_{20} & & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
a_{30} & & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & \cdots
\end{array}$$

□

Folgerung:
Sind A, B abzählbar, so ist auch $A \times B$ abzählbar.

zur Übung: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Lemma 13

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann existieren komplakte Mengen $A_k, k \in \mathbb{N}$ mit $U = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$

(b) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Dann existieren offene Mengen $U_k, k \in \mathbb{N}$ mit $A = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} U_k$

Beweis:

zu (a) Für $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}^n$ sei $\overline{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) \leq \varepsilon\}$. Dann ist $\overline{U}_\varepsilon(a)$ kompakt. Setze nun

$$\mathfrak{M} = \{\overline{U}_{\frac{1}{m+1}}(a) \mid a \in U \cap \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}, \overline{U}_{\frac{1}{m+1}}(a) \subseteq U\}$$

Dann ist $\mathfrak{M}$ abzählbar und die Elemente von $\mathfrak{M}$ sind kompakt. o.E. sei $U \neq \emptyset$. Sei dann $\mathfrak{M} = \{A_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Wir zeigen

$$U = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$$

„$\supseteq$" ist klar.
„$\subseteq$" Sei $x \in U$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U$. Also existiert $m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Q}^n$ mit $d(x,a) \leq \dfrac{1}{m+1} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $x \in \overline{U}_{\frac{1}{m+1}}(a) \subseteq U$.
Also $\overline{U}_{\frac{1}{\varepsilon}}(a) = A_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

zu (b) $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen. Also existieren nach (a) kompakte Mengen $A_k, k \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{R}^n \setminus A = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$. Dann ist aber $A = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus A_k)$ und $\mathbb{R}^n \setminus A_k$ist offen.

□

Lemma 14

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, mit $f \geq 0$. Dann gilt:

(a) Ist A offen, so gibt es eine monoton wachsende Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen ≥ 0, die punktweise gegen f_A konvergiert.

(b) Ist A kompakt, so gibt es eine monoton fallende Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen ≥ 0, die punktweise gegen f_A konvergiert.

Beweis:

zu (a) Nach Lemma 13(a) wähle eine kompakte Menge A_k mit $A = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$. Wir können o.E. annehmen, dass $A_k \subseteq A_{k+1}$ für $k \in \mathbb{N}$. Mit Lemma 12 wähle für $k \in \mathbb{N}$ eine Treppenfunktion $\tilde{h}_k \geq 0$ mit

$$f(x) - \frac{1}{k+1} \leq \tilde{h}_k(x) \leq f(x) \quad \text{falls } c \in A_k$$

$$\tilde{h}_k(x) = 0 \quad \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus A$$

Setze nun für $k \in \mathbb{N}$ $\quad h_k = \max(\tilde{h}_0, \dots, \tilde{h}_k)$. Dann ist $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie gewünscht.

zu (b) Nach Lemma 13(b) wähle offene Mengen U_k mit $A = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} U_k$. Wir können o.E. annehmen, dass $U_{k+1} \subseteq U_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Mit Lemma 12 wähle für $k \in \mathbb{N}$ eine Treppenfunktion $\tilde{g}_k \geq 0$ mit

$$f(x) \leq \tilde{g}_k(x) \leq f(x) + \frac{1}{k+1} \quad \text{falls } x \in A$$

$$\tilde{g}_k(x) = 0 \quad \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus U_k$$

Setze nun für $k \in \mathbb{N}$ $\quad g_k = \min(\tilde{g}_0, \dots, \tilde{g}_k)$. Dann ist $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie gewünscht.

□

Satz 15

Jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist integrierbar.

Beweis:
Da f^+ und f^- auch stetig sind, genügt es für den Fall $f \geq 0$ zu zeigen. Nach Lemma 14(b) existiert eine monoton fallende Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen ≥ 0, die punktweise gegen f_k konvergiert. Nach dem kleinen Satz von Levi genügt es also zu zeigen, dass die Folge $\left(\int g_k \, \mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Dies ist aber klar, da

$$\int g_{k+1} \, \mathrm{d}x \geq \int g_k \, \mathrm{d}x \geq 0$$

□

Satz 16

Jede beschränkte stetige Funktione $f : U \to \mathbb{R}$ auf einer beschränkten offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist integrierbar.

Beweis:
Es genügt dies wieder für $f \geq 0$ zu zeigen. Nach Lemma 14(a) existiert eine monoton wachsende Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die punktweise gegen f_k konvergiert. Nach dem kleinen Satz von Levi genügt es wieder zu zeigen, dass die Folge $\left(\int h_k \,\mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Wähle hierzu einen Quader Q mit $U \subseteq Q$ und eine obere Schranke c von f. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$ $\quad h_k \leq f_k \leq c \cdot 1_Q$, also

$$\int h_k \,\mathrm{d}x \leq \int c \cdot 1_Q \,\mathrm{d}x$$

$\square$

04. November 2010

Wie berechnet man Integrale im $\mathbb{R}^n$?

Lemma 17

Seien $X = \mathbb{R}^p, Y = \mathbb{R}^q$ und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Dann ist für jedes $y \in Y$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ eine Treppenfunktion. Weiterhin ist $F(y) = \int\limits_X f(x,y) \,\mathrm{d}x$ eine Treppenfunktion, und es gilt

$$\int f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_Y F(y) \,\mathrm{d}y$$

Man schreibt dies kurz als

$$\int f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y) \,\mathrm{d}x \right) \,\mathrm{d}y$$

Beweis:
Wegen Linearität genügt es dies zu zeigen für den Fall $f = 1_Q$ für einen Quader $Q \subseteq X \times Y$. Dann ist aber $Q = P \times S$ für einen Quader $P \subseteq X$ und einen Quader $S \subseteq Y$. Somit ist für $y \in Y$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ geich 1_P für $y \in S$ und gleich 0 für $y \in Y \setminus S$. Somit ist $F = v(P) \cdot 1_S$ und daher

$$\int f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = v(Q) = v(P) \cdot v(S) = v(P) \int 1_S \,\mathrm{d}y = \int F(y) \,\mathrm{d}y$$

$\square$

Korollar (zum Beweis von Lemma 17)

Sei alles wie oben. Dann gilt

$$\int f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x$$

Notation:
Sei $A \subseteq X \times Y$. Setze dann für $y \in Y$

$$A_y = \{x \in X \mid (x,y) \in A\}$$

und für $x \in X$

$$A_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in A\}$$

(Ist etwas ungenau!)

Satz 18

Sei $X = \mathbb{R}^p$ und $Y = \mathbb{R}^q$. Weiterhin sei $A \subseteq X \times Y$ eine kompakte oder eine beschränkte offene Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion. Dann ist für jedes $y \in Y$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ integrierbar (als Funktion auf A_y). Weiterhin ist $F(y) = \int\limits_{A_y} f(x,y)\ \mathrm{d}x$ integrierbar, und es gilt

$$\int_A f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int_Y F(y)\ \mathrm{d}y$$

Man schreibt dies kurz als

$$\int_A f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int_Y \left(\int_{A_y} f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y$$

Beweis:
Sei zuerst A offen und beschränkt. Es genügt wider den Fall $f \geq 0$ zu betrachten. Sei nach Lemma 14 (a) $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die punktweise gegen f_A konvergiert. Für jedes $y \in Y$ ist also $(x \mapsto h_k(x,y))_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen auf X, die gegen die Funktion $x \mapsto f_A(x,y)$ punktweise konvergiert. Wie im Beweis von Satz 16 zeigt man die Folge $\left(\int\limits_X h_k(x,y)\ \mathrm{d}x \right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Nach dem kleinen Satz von Levi ist also $x \mapsto f_A(x,y)$ integrierbar, und es gilt

$$F(y) = \lim_{k\to\infty} \int_X h_k\ \mathrm{d}x$$

Die Integrierbarkeit von F erhalten wir auch aus dem kleinen Satz von Levi wie folgt: Die Funktion $H_k(y) = \int\limits_X h_k(x,y)\ \mathrm{d}x$ sind auch Treppenfunktionen. $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen F. Weiterhin ist die Folge $\left(\int H_k\ \mathrm{d}y\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, denn nach Lemma 17 ist

$$\int H_k(y)\ \mathrm{d}y = \int h_k(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) \leq \int f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y)$$

Also ist nach Levi

$$\int F(y)\ \mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} \int H_k(y)\ \mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} \int h_k(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int f_A\ \mathrm{d}(x,y)$$

Der Fall einer kompakten Menge A wird analog behandelt.

$\square$

Korollar (zum Beweis von Satz 18)

Sei alles wie oben. Dann gilt

$$\int\limits_A f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int\limits_X \left(\int\limits_{A_x} f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x$$

Beispiele:

(1) Integration von stetigen Funktionen auf einem kompakten Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^2$. Seien $I = [a,b]$ und $J = [c,d], Q = I \times J$ und $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$Q_y = \begin{cases} I & \text{für } y \in J \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Also gilt

$$\int\limits_Q f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int \left(\int\limits_{Q_y} f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y = \int\limits_J \left(\int\limits_I f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_J \left(\int\limits_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y$$

Also etwa für $f(x,y) = x+y$:

$$\int\limits_a^b (x+y)\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + xy \right)\Bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2} - (b-a)y$$

und daher

$$\int\limits_Q (x+y)\ \mathrm{d}(x+y) = \int\limits_c^d \left(\frac{b^2-a^2}{2} + (b-a)y \right)\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}(b^2-a^2)(d-c) + \frac{1}{2}(b-a)(d^2-c^2)$$

(2) Integration von stetigen Funktionen auf einen abgeschlossenen Kreis um den Nullpunkt. Sei $r > 0$ und $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+x^2} \leq r\}$ Setze $J = [-r, r]$. Hier ist für $y \in J \quad K_y = [-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}]$ und für $y \in \mathbb{R} \setminus J \quad K_y = \emptyset$. Also

$$\int\limits_K f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int \left(\int\limits_{K_y} f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y = \int\limits_J \left(\int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{-r}^{r} \left(\int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y$$

Für die Integration von stetigen Funktionen auf Quadern bzw. Kugeln im $\mathbb{R}^3$ muss man dieses Verfahren zweimal anwenden.

Bemerkung:
mit dem Korollar zu Satz 18 erhält man für stetiges $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ die Vertauschungsregel

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y$$

Definition

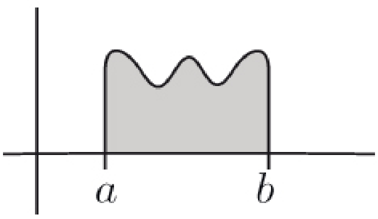
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A ist integrierbar, wenn 1_A integrierbar ist. Ist dies der Fall, so heißt $v(A) := \int 1_A\ \mathrm{d}x$ das Volumen (oder Maß) von A
Manchmal schreiben wir auch $v_n(A)$ statt $v(A)$.
Für Quader stimmt diese Definition mit der Früheren überein.

09. November 2010

Nach Satz 15 und Satz 16 sind kompakte und beschränkte offene Mengen integrierbar.

Bemerkung:
Sind A, B integrierbar und $A \subseteq B$, so $v(A) \leq v(B)$

Beispiel:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f \geq 0$. Setze $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$. Dann ist A integrierbar und es gilt



$$v(A) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_0^{f(x)} 1\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Mit Satz 18 erhält man z.B. für kompakte Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$

$$v(A) = \int v(A_y)\ \mathrm{d}y$$

Ist also etwa $B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $h \geq 0, z = B \times [0, h]$ der Zylinder mit der Basis B und Höhe h, so gilt:

$$v(Z) = h \cdot v(B)$$

Bemerkung:
Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbar, so ist f über A integrierbar.

Beweis:
$f_A = f \cdot 1_A$. Also folgt die Behauptung aus Satz 9.

□

Definition

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A ist eine Nullmenge, wenn A integrierbar ist und $v(A) = 0$ gilt.

Bemerkung:
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt:
A ist eine Nullmenge, genau dann, wenn $||1_A||_1 = 0$

Beweis:
Ist A eine Nullmenge, so ist nach Satz 2 $0 = \int 1_A\ \mathrm{d}x = ||1_A||_1$. Sei umgekehrt $||1_A||_1 = 0$. Setze $f_k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge der Treppenfunktion mit $\lim\limits_{k \to \infty} \underbrace{||1_A - f_k||_1}_{=0} = 0$. Also ist A integrierbar und $\int 1_A\ \mathrm{d}x = 0$.

□

Folgerung:
Ist B eine Nullmenge und $A \subseteq B$, so ist A eine Nullmenge, denn $||1_A||_1 \leq ||1_B||_1 = 0$.

Satz 19

Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen im $\mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge

Beweis:
Seien A_k Nullmengen für $k \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$. Dann ist

$$||1_A||_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||1_{A_k}||_1 = 0$$

□

Insbesondere ist also jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, da jede Einermenge eine Nullmenge ist. (Also ist $\mathbb{R}$ nicht abzählbar.)

Definition

Sei E eine Eigenschaft von Punkten im $\mathbb{R}^n$. Man sagt dann, fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ haben die Eigenschaft E oder fast überall gilt E, wenn die Menge aller Punkte, für die E nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Satz 20

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $||f||_1 \leq \infty$. Dann sind die Werte von f fast überall endlich.

Beweis:
Setze $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \infty \text{ oder } f(x) = -\infty\}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $1_A \leq \varepsilon \cdot |f|$, also $||1_A||_1 \leq \varepsilon ||f||_1$. Somit $||1_A||_1 = 0$

□

Satz 21 (Modifikationssatz)

Seien f und g Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die fast überall gleich sind. Weiterhin sei f integrierbar. Dann ist auch auch g integrierbar, und es gilt

$$\int g \, dx = \int f \, dx$$

Beweis:
Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\}$ und $h = \infty \cdot 1_A$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $h_k = 1_A$. Dann ist $h = \sum\limits_{k=0}^{\infty} h_k$, also

$$||h||_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||h_k||_1 = 0$$

Wähle eine Folge von Treppenfunktionen $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k \to \infty} ||f - f_k||_1 = 0$.
Wegen $|g - f_k| \leq |f - f_k| + h$ gilt dann $||g - f_k||_1 \leq ||f - f_k||_1 + ||h||_1 = ||f - f_k||_1$. Also ist auch $\lim\limits_{k \to \infty} ||g - f_k||_1 = 0$, woraus die Behauptung folgt.

□

Satz 22

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann ist $||f||_1 = 0$ genau dann, wenn f fast überall gleich 0 ist.

Beweis:
Ist f fast überall 0, so ist nach Satz 21 f integrierbar und es gilt

$$||f||_1 = \int |f| \, \mathrm{d}x = \int 0 \, \mathrm{d}x = 0.$$

Sei umgekehrt $||f||_1 = 0$. Setze $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$. Dann ist $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ mit

$$A_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

Also ist jedes A_k eine Nullmenge, denn wegen $1_{A_k} \leq k \cdot |f|$ folgt $||1_{A_k}||_1 \leq k \cdot ||f||_1 = 0$. Somit ist nach Satz 19 A eine Nullmenge.

□

Korollar

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar mit $f \geq 0$ und $\int f \, \mathrm{d}x = 0$. Dann ist f fast überall 0.

Beweis:
$||f||_1 = \int f \, \mathrm{d}x$

□

Satz 23

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine integrierbare offene Menge U mit $A \subseteq U$ und $v(U) \leq \varepsilon$.

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $||2 \cdot 1_A||_1 = 0$ gibt es eine Hüllreihe $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k}$ von $2 \cdot 1_A$ mit

$$I(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v(Q_k) < \varepsilon.$$

Für $m \in \mathbb{N}$ setze $f_m = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k \cdot 1_{Q_k}$. Dann ist f_m eine Treppenfunktion. Die Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und die Folge $\left(\int f_m \, \mathrm{d}x\right)_{m\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn

$$\int f_m \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{m} c_k \cdot v(Q_k) < \varepsilon$$

Wegen $\varphi(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$ ist also nach Levi φ integrierbar und es gilt:

$$\int \varphi \, \mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \int f_m \, \mathrm{d}x = I(\varphi)$$

Setze nun $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > 1\}$. Da φ eine Hüllreihe von $2 \cdot 1_A$ ist, ist $A \subseteq U$. Weiterhin ist U offen, denn sei $a \in U$, dann existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $f_m(a) > 1$. Sei V der Durchschnitt der endlich vielen Q_i mit $i \leq m$ und $a \in Q_i$. Dann ist V offen und für alle $x \in V$ ist $f_m(x) \geq f_m(a) > 1$. Also ist nach Definition $V \subseteq U$ und natürlich $a \in V$.
Schließlich zeigen wir noch, dass U integrierbar ist mit $v(U) < \varepsilon$.Nach Lemma 14 (a) gibt es eine monoton wachsende Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die punktweise gegen 1_U konvergiert. Die Folge $\left(\int g_k \, \mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn $g_k \leq 1_k \leq \varphi$, also

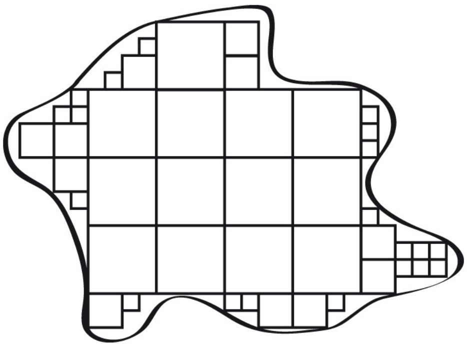
$$\int g_k \, \mathrm{d}x \leq \int \varphi \, \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Also ist nach Levi 1_k integrierbar, und es gilt $v(U) = \int 1_U \, \mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int g_k \, \mathrm{d}x \leq \int \varphi \, \mathrm{d}x < \varepsilon$. □

Wir benötigen noch die folgende Verstärkung von Lemma 13 (a):

Lemma 24

Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Würfeln $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben.



Beweis:
Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{M}_k$ die Menge aller Quader der Form $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$ mit $I_j = \left[\frac{m_j}{2^k}, \frac{m_j+1}{2^k}\right]$ für gewisse $m_j \in \mathbb{Z}$.
$\mathfrak{M}$ ist abzählbar. Weiterhin gilt für $Q \in \mathfrak{M}_k$ und $P \in \mathfrak{M}_i$ mit $k \leq i$, dass sich Q und P nur an Randpunkten schneiden oder $P \subseteq Q$. Wir schöpfen nun U rekursiv mit diesen Quadern aus. Sei also $\mathfrak{M}_0^* = \{Q \in \mathfrak{M}_0 \mid Q \subseteq U\}$. Für $k > 0$ sei $\mathfrak{M}_k^*$ die Menge aller $Q \in \mathfrak{M}_k$ mit $Q \subseteq U$, die in keinem $P \in \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \mathfrak{M}_i^*$ enthalten sind.

Setze $\mathfrak{M}^* = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathfrak{M}_k^*$.
Dann ist $\mathfrak{M}^*$ abzählbar. Sei also $\mathfrak{M}^* = \{Q_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ (o.E. sei $U \neq \emptyset$).
Nach Konstruktion genügt es zu zeigen, dass $U = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} Q_j$.
Offenbar gilt „$\supseteq$“.
Sei umgekehrt $a \in U$. Wegen U offen existiert dann ein $k \in \mathbb{N}$ und $Q \in \mathfrak{M}_k$ mit $a \in Q \subseteq U$.
Nach Konstruktion ist dann $Q \in \mathcal{M}_k^*$ oder es existiert $P \in \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \mathfrak{M}_i^*$ mit $Q \subseteq P$. In beiden Fällen ist $a \in \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} Q_j$. □

Wir erhalten nun folgende schöne Charakterisierung der Nullmengen.

Satz 25

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Quadern mit $A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$ gibt.

Beweis:
Sei A eine Nullmenge und $\varepsilon > 0$. Nach Satz 23 existiert dann eine integrierbare offene Menge U mit $A \subseteq U$ und $v(U) < \varepsilon$. Wähle hierzu $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$ wie in Lemma 24.
Da die Q_k nur Randpunkte gemeinsam haben gilt dann für $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{m} v(Q_k) = v\left(\bigcup_{k=0}^{m} Q_k\right) \leq v(U)$$

Also $\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k) \leq v(U) < \varepsilon$.
Sei umgekehrt die rechte Seite erfüllt.
Für $\varepsilon > 0$ wähle $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie dort. Dann gilt $1_A \leq \sum_{k=0}^{\infty} 1_{Q_k}$ und daher

$$||1_A||_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||1_{Q_k}||_1 = \sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt $||1_A||_1 = 0$, d.h. A ist Nullmenge.

□

Wir zeigen noch folgende Verstärkung von Satz 15:

Satz 26

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Ist dann $A = \{x \in K \mid f \text{ ist nicht stetig in } x\}$ eine Nullmenge, so ist f integrierbar.

Beweis:
Sei c eine obere Schranke für $|f|$. Es genügt zu zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion g gibt mit $||f_K - g||_1 < \varepsilon$. Wähle nach Satz 24 eine offene Menge U mit $A \subseteq U$ und $c \cdot v(U) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $K \setminus U$ kompakt. Also ist nach Satz 15 f über $K \setminus U$ integrierbar. Somit existiert eine Treppenfunktion g mit $\left|\left|f_{K\setminus U} - g\right|\right|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Weiterhin ist $||f_U||_1 \leq c \cdot v(U) < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit

$$||f_K - g||_1 \leq \left|\left|f_{K\setminus U} - g\right|\right|_1 + ||f_U||_1 < \varepsilon$$

□

§17 Konvergenzsätze, Satz von Fubini

$|| \; ||_1$ ist nur eine Halbnorm. Dennoch können wir hiermit eine Konvergenztheorie aufbauen.

Definition

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\overline{\mathbb{R}}$.
Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist L^1-konvergent gegen f und f heißt dann ein L^1-Grenzwert von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wenn $\lim\limits_{k\to\infty} ||f - f_k||_1 = 0$.

Da $|| \; ||_1$ nur eine Halbnorm ist, ist ein L^1-Grenzwert von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht eindeutig bestimmt. Wie üblich zeigt man nur: Sind f, g L^1-Grenzwerte von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so ist $||f - g||_1 = 0$, d.h. nach Satz 22 aus §16 ist f fast überall gleich g.

Definition

Eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\overline{\mathbb{R}}$ ist eine L^1-Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $||f_k - f_m||_1 < \varepsilon$ für alle $k \geq m$.

Wie üblich zeigt man:

(1) Jede L^1-konvergente Folge ist eine L^1-Cauchyfolge

(2) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchyfolge, so existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $||f_j - f_k||_1 < \varepsilon$ für alle $j, k \geq m$.

16. November 2010

Satz 1 (Riesz-Fischer)

Jede L^1-Cauchyfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ integrierbarer Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt einen L^1-Grenzwert f.
Für jedes solche f gilt:

(1) f ist integrierbar mit $\int f \, \mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}x$

(2) Eine Teilfolge von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall punktweise gegen f.

Beweis:
Wir definieren rekursiv Indizes $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$ mit $||f_k - f_{k_i}||_1 \leq \frac{1}{2^i}$ für alle $k \geq k_i$. Für $i \in \mathbb{N}$ setze $g_i = f_{k_i+1} - f_{k_i}$ und hiermit $g = \sum\limits_{i=0}^{\infty} |g_i|$. Es gilt dann $||g||_1 \leq \sum\limits_{i=0}^{\infty} ||g||_1 \leq \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$. Somit existiert eine Nullmenge A mit $g(x)$ endlich für alle $x \in \mathbb{R} \setminus A$. (o.E. sei auch $f_k(x)$ endlich für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, denn wegen f_k integrierbar existiert eine Nullmenge A_k mit $f_k(x)$

endlich für $x \in \mathbb{R}^n \setminus A_k$ und $A \cup \bigcup_k A_k$ auch Nullmenge) Also konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} g_i$ fast überall absolut. Definiere nun f durch

$$f(x) = \begin{cases} f_{k_0}(x) + \sum_{i=0}^{\infty} g_{k_i}(x)^{(*)} & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus A \\ 0 & \text{für } x \in A \end{cases}$$

Also ist $f(x)$ endlich für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir zeigen alle Eigenschaften für dieses f. Dies genügt. Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ist $f(x) = \lim_{i \to \infty} f_{k_i}(x)$. Also gilt (2). Weiterhin ist f integrierbar, denn sei $\varepsilon > 0$. Wähle ein m mit $\sum_{i=m}^{\infty} ||g_i||_1 \leq \varepsilon$ und $||f_k - f_{k_m}||_1 \leq \varepsilon$ für $k \geq m$. Sei h eine Treppenfunktion mit $||f_{k_m} - h||_1 \leq \varepsilon$. Dann ist $||f - h||_1 \leq ||f - f_{k_m}||_1 + ||f_{k_m} - h||_1 \leq \left|\left| \sum_{i=m}^{\infty} g_i \right|\right|_1 + \varepsilon \leq 2\varepsilon$.
Außerdem ist für $k \geq k_m$ $\quad ||f - f_k||_1 \leq ||f - f_{k_m}||_1 + ||f_{k_m} - f_k||_1 \leq 2\varepsilon$.
Also ist f ein L^1-Grenzwert von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
Schließlich folgt (1) wegen

$$\left| \int f \, \mathrm{d}x - \int f_k \, \mathrm{d}x \right| \leq \int |f - f_k| \, \mathrm{d}x = ||f - f_k||_1$$

□

(∗): $f_{k_0}(x) + \sum_{i=0}^{\infty} g_{k_i}(x) = f_{k_0}(x) + \sum_{i=0}^{\infty} f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)$ Teleskopsumme für $\sum_{i=0}^{n}$ statt $\sum_{i=0}^{\infty}$

Korollar

Jede integrierbare Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ ist L^1-Grenzwert einer Folge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit den Eigenschaften

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} ||g_{k+1} - g_k||_1 < \infty$

(2) $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert fast überall punktweise gegen f.

Beweis:
Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim_{k \to \infty} ||f - f_k||_1 = 0$. Diese besitzt nach obigem Beweis eine Teilfolge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$, die die Eigenschaft (1) hat und fast überall punktweise gegen einen L^1-Grenzwert f^* konvergiert. Dann sind aber f und f^* fast überall gleich, also gilt auch (2).

□

Satz 2 (Levi)

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende oder fallende Folge von integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Weiterhin sei $\left(\int f_k \,\mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Definiere $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ durch $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x$$

Beweis:
Sei ohne Einschränkung die Folge monoton wachsend. Dann ist auch die Folge der Integrale $\left(\int f_k \,\mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach Voraussetzung beschränkt. Also ist sie konvergent.
Wir zeigen zuerst, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchyfolge ist. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $\int f_k \,\mathrm{d}x - \int f_m \,\mathrm{d}x < \varepsilon$ für alle $k \geq m$. Dann gilt für $k \geq m$ wegen Monotonie $||f_k - f_m||_1 = \int |f_k - f_m| \,\mathrm{d}x = \int f_k \,\mathrm{d}x - \int f_m \,\mathrm{d}x < \varepsilon$. Nach Satz 1 besitzt $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen integrierbaren L^1-Grenzwert g. Weiterhin konvergiert eine Teilfolge von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall punktweise gegen g. Also ist f fast überall gleich g. Somit ist nach dem Modifikationssatz auch f integrierbar und es gilt nach Satz 1 $\int f \,\mathrm{d}x = \int g \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x$.

□

Korollar

Sei f eine Funktion auf $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $A = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ mit $A_k \subseteq A_{k+1}$. Sei f über A_k integrierbar für jedes $k \in \mathbb{N}$, und die Folge $\left(\int\limits_{A_k} |f| \,\mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sei beschränkt. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{A_k} f \,\mathrm{d}x$$

Beweis:
Wegen der Zerlegung $f = f^+ - f^-$ genügt es dies für $f \geq 0$ zu zeigen. Dann ist aber $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge, die punktweise gegen f_A konvergiert.

□

Satz 3 (Lebesgue, Satz von der majorisierten Konvergenz)

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die fast überall punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Es gebe eine integrierbare Funktion g mit $|f_k| \leq g$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist f integrierbar, und es gilt

$$\int f \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}x$$

Beweis:
Nach dem Modifikationssatz können wir o.E. annehmen, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ überall punktweise gegen f konvergiert. Definiere nun für $k \in \mathbb{N}$ $\quad g_k : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$g_k(x) = \sup\{f_i(x) \mid i \geq k\}.$$

Für $j \in \mathbb{N}$ setze $g_{k,j} = \max(f_k, f_{k+1}, \ldots, f_{k+j}$. Dann ist die Folge $(g_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, die $g_{k,j}$ sind integrierbar, und die Folge $\left(\int g_{k,j} \, \mathrm{d}x\right)_{j\in\mathbb{N}}$ ist durch $\int g \, \mathrm{d}x$ nach oben beschränkt. Da $(g_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen g_k konvergiert, ist also nach Levi g_k integrierbar, und es gilt $\int g_k \, \mathrm{d}x = \lim\limits_{j\to\infty} \int g_{k,j} \, \mathrm{d}x \leq \int g \, \mathrm{d}x$.
Weil aber auch $-g_{k,j} \leq g$ gilt, folgt $\left|\int g_k \, \mathrm{d}x\right| \leq \int g \, \mathrm{d}x$. Nach Definition ist nun aber $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und konvergiert punktweise gegen f. Somit ist nach Levi f integrierbar, und es gilt $\int f \, \mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int g_k \, \mathrm{d}x$. Definiere nun $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $h_k(x) = \inf\{f_i(x) \mid i \geq k\}$.
Dann erhält man völlig analog $\quad \int f \, \mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int h_k \, \mathrm{d}x$.
Wegen $h_k \leq f_k \leq g_k$ erhält man also auch

$$\int f \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}x$$

$\square$

Bemerkung:
Satz 3 gilt natürlich entsprechend für Integrierbarkeit über eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Wir untersuchen nun parameterabhängige Integrale auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Satz 4

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^n, b \in B$ und $f : A \times B \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für jedes $x \in A$ ist die Funkion $y \mapsto f(x,y)$ stetig in b

(2) Für jedes $y \in B$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ integrierbar

(3) Es gibt eine integrierbare Funktion $h : A \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $|f(x,y)| \leq h(x)$ für alle $(x,y) \in A \times B$

Dann ist die durch $g(y) = \int\limits_A f(x,y) \, \mathrm{d}x$ definierte Funktion $g : B \to \mathbb{R}$ in b stetig.

Beweis:
Sie $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge aus B mit $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$.
Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $f_k : A \to \mathbb{R}$ durch $f_k(x) = f(x, b_k)$ und sei $f^* : A \to \mathbb{R}$ definiert durch $f^*(x) = f(x, b)$. Wegen (1) konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $f^*(x)$. Wegen (2) und (3) folgt aber aus Satz 3

$$\lim_{k\to\infty} g(b_k) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_A f_k \; \mathrm{d}x = \int\limits_A f^* \; \mathrm{d}x = g(b)$$

□

Satz 5

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : A \times U \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

(1) Für jedes $x \in A$ ist die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ stetig differenzierbar

(2) Für jedes $y \in U$ ist die Funktion $x \mapsto f(x, y)$ integrierbar

(3) Es gibt eine integrierbare Funktion $h : A \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y_i}(x, y)\right| \leq h(x)$ für alle $(x, y) \in A \times U$ und alle $1 \leq i \leq m$

Dann ist die durch $g(y) = \int\limits_A f(x, y) \; \mathrm{d}x$ definierte Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Weiterhin ist für jedes $y \in U$ und $1 \leq i \leq m$ die Funktion $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y_i}(x, y)$ integrierbar, und es gilt $(*)$ $\quad \dfrac{\partial g}{\partial y_i}(y) = \int\limits_A \dfrac{\partial f}{\partial y_i}(x, y) \; \mathrm{d}x$

Beweis:
Sei $b \in U$. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ so, dass alle $y \in \mathbb{R}^m$ mit $||y - b||_\infty < \varepsilon$ in U liegen.
Sei $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ mit $0 < |h_k| < \varepsilon$.
Sei $1 \leq i \leq m$ und setze $b_k = b + h_k \cdot e_i$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$ ist.
Definiere eine Funktion $g_k : A \to \mathbb{R}$ durch $g_k(x) = \dfrac{f(x, b_k) - f(x, b)}{h_k}$.
Die g_k sind integrierbar, und für jedes $x \in A$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, b).$$

Weiterhin ist nach dem Mittelwertsatz wegen (3) $|g_k| \leq h$.
Somit ist nach Satz 3 auch die Funktion $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y_i}(x, b)$ integrierbar, und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_A g_k \; \mathrm{d}x = \int\limits_A \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, b) \; \mathrm{d}x.$$

Aber $\int\limits_A g_k \; \mathrm{d}x = \dfrac{g(b_k) - g(b)}{h_k}$. Somit existiert die i-te partielle Ableitung von g in b, und es gilt $(*)$. Wegen $(*)$ folgt dann aus Satz 4, dass die i-te partielle Ableitung stetig ist. Also ist g stetig differenzierbar.

□

Definition

Sei f eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$. f ist lokal-integrierbar, wenn es über jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist.

Beispiel:
Jede stetige Funktion ist lokal-integrierbar.

Bemerkung:
Ist f lokal-integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$, so ist f über jeder beschränkten integrierbaren Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ integrierbar.

Bemerkung:
Sei f eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

(1) f ist lokal-integrierbar

(2) Für alle $r > 0$ ist f über $U_r(0)$ integrierbar

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert Umgebung U von x mit f ist über U integrierbar.

Beweis:
(1) $\to$ (2): folgt aus obiger Bemerkung
(2) $\to$ (3): trivial
(3) $\to$ (1):
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Für alle $x \in K$ wähle offene Umgebung $U(x)$ von x mit f über $U(x)$ integrierbar. Dann ist $\mathcal{U} = \{U(x) \mid x \in K\}$ ist offene Überdeckung von K. Dann existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_m \in K$ mit $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U(x_i)$. Aber f ist über $\bigcup\limits_{i=1}^{m} U(x_i)$ integrierbar, und also über K.

□

23. November 2010

Aus dem Korollar zum Satz von Levi erhält man sofort:

Bemerkung:
Sei f eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn f lokal-integrierbar ist und $||f||_1 < \infty$

Eine leichte Verstärkung von Satz 9 aus §16 liefert

Satz 6

Seien f eine integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und g eine beschränkte lokal-integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist fg integrierbar.

Beweis:
Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $|g| \leq c$. Nach Satz 9 aus §16 ist $f \cdot g$ lokal-integrierbar, und es gilt

$$||f \cdot g||_1 \leq c \cdot ||f||_1 < \infty$$

$\square$

Definition

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
A ist messbar, wenn 1_A lokal-integrierbar ist.
Ist dies der Fall, so setze $v(A) = ||1_A||_1$.
(Volumen (Maß) von A)

Dies stimmt für integrierbare Mengen mit der früheren Definition überein.

Aus Satz 6 folgt:

Bemerkung:
Sei f integrierbare Funktion und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar. Dann ist f über A integrierbar.

Satz 7

(a) Die messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ bilden eine σ-Algebra, d.h. es gilt

  (i) $\mathbb{R}^n$ ist messbar
  (ii) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so auch $\mathbb{R}^n \setminus A$.
  (iii) Ist $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Mengen, so ist $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ messbar.

(b) $v(\emptyset) = 0, v(\mathbb{R}^n) = \infty$ und $v(A) \geq 0$ für alle messbaren A

(c) Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $v\left(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} v(A_k)$

Beweis:

zu (a) (i) ist trivial

zu (ii) klar, da $1_{\mathbb{R}^n \setminus A} = 1 - 1_A$

zu (iii) Für $m \in \mathbb{N}$ setze $B_m = \bigcup\limits_{k=0}^{m} A_k$ und setze $A = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$. Durch Induktion folgt, dass jedes B_m messbar ist. Also folgt aus Korollar zu Satz von Levi, dass $A = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} B_m$ messbar ist.

zu (b) ist trivial

zu (c) Setze wieder $B_m = \bigcup_{k=0}^{m} A_k$ und sei $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. Da die A_k paarweise disjunkt sind, ist $v(B_m) = \sum_{k=0}^{m} v(A_k)$. Ist B_m nicht integrierbar, so auch A und die Behauptung ist trivial. Ist die Folge $(v(B_m))_{m\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt, so ist $v(A) = \infty$, also klar. Sei also $(v(B_m))_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Wegen $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_m$ ist aber dann nach Korollar zu Levi A integrierbar und $v(A) = \int_A 1 \, dx = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} 1 \, dx = \lim_{k\to\infty} v(B_m) = \sum_{k=0}^{\infty} v(A_k)$.

□

Bemerkung:

Ist $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, so ist auch $\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$ messbar, denn

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus A_k)$$

Wir wollen nun den vollen Satz von Fubini beweisen.
Hierzu benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 8

Sei $X = \mathbb{R}^p, Y = \mathbb{R}^q$ und $A \subseteq X \times Y$ eine Nullmenge. Dann gibt es eine Nullmenge $B \subseteq Y$ derart, dass für alle $y \in Y \setminus B$

$$A_y = \{x \in X \mid (x,y) \in A\}$$

eine Nullmenge ist.

Beweis:
Definiere $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ durch $f(y) = ||1_{A_y}||_1$. Es genügt zu zeigen, dass $||f||_1 = 0$. Dann ist nach Satz 23 aus §16 f fast überall gleich 0, d.h. fast überall ist A_y eine Nullmenge. Sei also $\varepsilon > 0$. Wegen A Nullmenge gibt es nach Satz 25 aus §16 eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Quadern in $X \times Y$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$. Für $k \in \mathbb{N}$ existieren Quader $P_k \subseteq X$ und $S_k \subseteq Y$ mit $Q_k = P_k \times S_k$. Es ist $v(Q_k) = v(P_k) \cdot v(S_k)$. Wegen $1_{A_y} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 1_{P_k} 1_{S_k}(y)$ erhalten wir

$$f(y) = ||1_{A_y}||_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||1_{P_k}||_1 \cdot 1_{S_k}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} v(P_k) \cdot 1_{S_k}(y)$$

und daher

$$||f||_1 \leq \left|\left| \sum_{k=0}^{\infty} v(P_k) \cdot 1_{S_k} \right|\right|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} v(P_k) \cdot ||1_{S_k}||_1 = \sum_{k=0}^{\infty} v(P_k) \cdot v(S_k) = \sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $||f||_1 = 0$

□

Satz 9 (Fubini)

Seien $X = \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^q$ und $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gilt

(a) Es existiert eine Nullmenge $B \subseteq Y$ derart, dass für alle $y \in Y \setminus B$ die Funktion $x \mapsto f(x, y)$ integrierbar ist

(b) Definiert man die Funktion $F : Y \to \mathbb{R}$ durch $F(y) = \begin{cases} \int f(x,y)\ \mathrm{d}x & \text{falls } y \in Y \setminus B \\ 0 & \text{falls } y \in B \end{cases}$ so ist F integrierbar und es gilt

$$\int f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int F(y)\ \mathrm{d}y$$

Wir schreiben hierfür kurz

$$\int f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y$$

Weiterhin gilt auch mit der analogen Interpretation

$$\int f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x$$

Beweis:

25. November 2010

Nach dem Korollar zu Satz 1 wähle eine Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{k\to\infty} ||f - g_k||_1 = 0$ und

(1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||g_{k+1} - g_k||_1 < \infty$

(2) $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert außerhalb einer Nullmenge $A \subseteq X \times Y$ punktweise gegen f.

Für $y \in Y$ seien $g_{k,y}(x) = g_k(x,y)$, $f_y(x) = f(x,y)$. Die $g_{k,y}$ sind natürlich Treppenfunktionen. Lemma 8 angewandt auf A liefert die Existenz einer Nullmenge $C \subseteq Y$ mit

(3) Für $y \in Y \setminus C$ konvergiert $(g_{k,y})_{y\in\mathbb{N}}$ fast überall punktweise gegen f_y.

Definiere nun $H_k : Y \to \mathbb{R}$ durch $H_k(y) = \int |g_{k+1} - g_{k,y}|\ \mathrm{d}x$. Nach dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen gilt:

$$\int H_k(y)\ \mathrm{d}y = \int |g_{k+1} - g_k|\ \mathrm{d}(x,y) = ||g_{k+1} - g_k||_1$$

und daher nach (1):

(4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \int H_k(y)\ \mathrm{d}y < \infty$

Die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} H_k$ wächst monoton, und die Integrale der Partialsummen sind nach (4) beschränkt. Also ist nach Levi $\sum_{k=0}^{\infty} H_k$ integrierbar. Somit ist nach Satz 21 aus §16:

(5) $\sum_{k=0}^{\infty} ||g_{k+1,y} - g_{k,y}||_1 < \infty \quad \forall y \in Y \setminus D$

Setze nun $B = C \cup D$. Also ist B eine Nullmenge. Sei $y \in Y \setminus B$. Wegen (5) ist dann $(g_{k,y})_{y\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchyfolge. Nach Satz 1 konvergiert eine Teilfolge hiervon punktweise gegen eine integrierbare Funktion f_y^*. Wegen (3) ist aber dann f_y^* fast überall gleich f_y. Also ist auch f_y integrierbar. Damit ist (a) gezeigt.
Wegen Satz 1 gilt außerdem

(6) $F(y) = \int f(x,y)\ \mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int g_k(x,y)\ \mathrm{d}x$ für $y \in Y \setminus B$

Definiere nun $G_k : Y \to \mathbb{R}$ durch $G_k(y) = \int g_k(x,y)\ \mathrm{d}x$. Die G_k sind Trepenfunktionen. Wegen (6) gilt

(7) $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $y \setminus B$ punktweise gegen F.

Wegen (4) und $|G_{k+1}(y) - G_k(y)| \leq H_k(y)$ gilt

(8) $\sum_{k=0}^{\infty} ||G_{k+1} - G_k||_1 < \infty$

Somit ist $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchyfolge von Treppenfunktionen. Nach Satz 1 konvergiert also eine Teilfolge fast überall gegen eine integrierbare Funktion F^*.
Wegen (7) ist dann $F = F^*$ fast überall und daher ist auch F integrierbar. Weiterhin ist nach Satz 1

$$\int F(y)\ \mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} \int G_k(y)\ \mathrm{d}y$$

Nach dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen ist aber $\int G_k(y)\ \mathrm{d}y = \int G_k(x,y)\ \mathrm{d}(x,y)$.
Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} ||f - g_k||_1 = 0$ ist nach Definition

$$\lim_{k\to\infty} \int g_k(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y)$$

Damit ist (b) gezeigt.
Der Zusatz ergibt sich aus dem Beweis.

$\square$

Um Fubini anwenden zu können, muss man wissen, dass f integrierbar ist. Ein Kriterium hierfür ist:

Satz 10 (Tonelli)

Seien $X = \mathbb{R}^p, Y = \mathbb{R}^q$ udn $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine lokal-integrierbare Funktion.
Es existiere eines der Integrale

$$\int \left(\int |f(x,y)| \, \mathrm{d}x \right) \, \mathrm{d}y \qquad \text{oder} \qquad \int \left(\int |f(x,y)| \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x$$

Dann ist f integrierbar.

Beweis:
Es genügt zu zeigen, dass $|f|$ integrierbar ist, denn dann ist $||f||_1 < \infty$.
Es existiere etwa das erste Integral. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $Q_k = [-k,k]^{p+q}$ und setze $f_k = \min(|f|, k \cdot 1_{Q_k}$. Dann ist f integrierbar.
Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise monoton wachsend gegen $|f|$ und die Folge $\left(\int f_k \, \mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn nach Fubini angewandt auf f_k erhält man

$$\int f_k(x,y) \, \mathrm{d}(x,y) = \int \left(\int f_k(x,y) \, \mathrm{d}x \right) \, \mathrm{d}y \leq \int \left(\int |f_k(x,y)| \, \mathrm{d}x \right) \, \mathrm{d}y$$

Nach Levi ist also $|f|$ integrierbar.

□

Satz 11

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ lokal-integrierbar. Setze $A = \{x \mid f(x) > 0\}$ und $B = \{x \mid f(x) \geq 0\}$. Dann sind A und B messbar.

Beweis:
Setze $g = \max(f, 0)$. Dann ist g lokal-integrierbar. Für $k \in \mathbb{N}$ setze $h_k = \min(kg, 1)$. Dann konvergiert die Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise monoton wachsend gegen 1_A. Also ist nach Levi A messbar. Damit ist aber auch die Menge $\{x \mid -f(x) > 0\}$ messbar, und soimt auch B als deren Komplement.

□

30. November 2010

Satz 10

Seien $f : \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ und $g : \mathbb{R}^q \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Definiere $f \otimes g : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y) \text{ für } (x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

Dann ist $f \otimes g$ integrierbar, und es gilt

$$\int f \times g \, \mathrm{d}(x,y) = \int f \, \mathrm{d}x \cdot \int g \, \mathrm{d}y$$

Beweis: siehe Übungen

Satz 13

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$. Setze $G = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \dots, x_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
Dann gilt:
f ist integriebrar genau dann, wenn G integrierbar ist. Ist dies der Fall, so ist $\int f \, \mathrm{d}x = v(G)$

Beweis:
Sei zuerst G integrierbar. Dann gilt nach dem Satz von Fubini

$$(*) v(G) = \int (\int 1_{[0, f(x_1, \dots, x_n)]} \, \mathrm{d}x_{n+1}) \, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) = \int f \, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)$$

Also ist f integrierbar, und es gilt der Zusatz.

Sei nun umgekehrt f integrierbar. Definiere $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1}(f(x_1, \dots, x_n) - x_{n+1}) = x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) - x_{n+1}^2$$

Nach Satz 12 ist g lokal-integrierbar. Nun ist aber $G = \{x \mid g(x) \geq 0\}$. Also ist nach Satz 11 G messbar. Weiterhin existiert nach $(*)$ das Integral auf der rechten Seite. Also ist G nach Tonelli integrierbar.

$\square$

Korollar

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Setze

$$G^+ = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \mid 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \dots, x_n)\}$$

$$G^- = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid f(x_1, \dots, x_n) \leq -x_{n+1} \leq 0\}$$

Dann gilt:
f ist integrierbar genau dann, wenn G^+, G^- integrierbar sind. Ist dies der Fall, so ist

$$\int f \, \mathrm{d}x = v(G^+) - v(G^-)$$

Beweis:
Betrachte die Zerlegung $f = f^+ - f^-$

$\square$

§18 Der Transformationssatz

Der Transformationssatz ist eine mehrdimensionale Version der Substitutionsregel. Hierzu folgende Vorbetrachtung:
Seien $I = [a, b]$ und $J = [\alpha, \beta]$ kompakte Intervalle und $\varphi : I \to J$ eine bijektive stetig differenzierbare Funktiion. Weiterhin sei $f : J \to \mathbb{R}$ stetig. Nach Substitutionsregel ist dann

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Wegen φ bijektiv und stetig ist φ streng monoton wachsend oder fallend. Im ersten Fall gilt insbesondere $\varphi(a) = \alpha$ und $\varphi(b) = \beta$, im zweiten Fall $\varphi(a) = \beta$ und $\varphi(b) = \alpha$. Weiterhin ist im ersten Fall $\varphi' \geq 0$ und im Zweiten Fall $\varphi' \leq 0$. Somit liefert in beiden Fällen die obige Gleichung

$$\int_I f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)| \, \mathrm{d}t = \int_J f(x) \, \mathrm{d}x$$

Für die Verallgemeinerung ist $\varphi'(t)$ zu lesen als $\det \varphi'(t)$

Wir benötigen noch eine Definition

Definition

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \to V$. Dann ist φ ein Diffeomorphismus, wenn gilt:

(i) φ ist bijektiv

(ii) U, V sind offen

(iii) φ und φ' sind stetig differenzierbar

Bemerkung:
In Analysis II haben wir gezeigt:
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ injektive stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi'(x)$ invertierbar (d.h. $\det \varphi'(x) \neq 0$) für alle $x \in U$. Setze $V = \varphi[U]$. Dann ist φ ein Diffeomorphismus.

Unser Ziel ist der folgende Transformationssatz:

Sei $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Weiterhin sei $f : V \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist die Funktion $(f \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'|$ über U integrierbar und es gilt

$$\int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det \varphi'(x)| \, \mathrm{d}x = \int_V f(y) \, \mathrm{d}y$$

Für den Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen von denen manche ein Spezialfall des Transformationssatzes sind.
Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ und ein $a \in \mathbb{R}^n$ definiere die zu a translatierte Funktion $\tau_a f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$(\tau_a f)(x) = f(x - a)$$

Satz 1 (Translationsinvarianz des Lebesgue-Integrals)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\tau_a f$ integrierbar, und es gilt

$$\int f(x-a)\ \mathrm{d}x = \int f\ \mathrm{d}x$$

Beweis:
Für jeden Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist nach Definition $v(a+Q) = v(Q)$. Wegen Linearität ist die Behauptung für Treppenfunktionen richtig. Weiterhin folgt, dass für $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$
$||\tau_a g||_1 = ||g||_1$. Denn eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k}$ ist genau dann eine Hüllreihe von g, wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k 1_{a+Q_k}$ eine Hüllreihe von $\tau_a g$ ist. Sei also nun $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{k\to\infty} ||f - f_k||_1$. Dann ist auch $\tau_a f_k$eine Treppenfunktion und es gilt $||\tau_a f_k - \tau_a f||_1 = ||\tau_a(f - f_k)||_1 = ||f - f_k||_1$. Also ist $\tau_a f$ integrierbar und es gilt

$$\int f(x-a)\ \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x-a)\ \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x)\ \mathrm{d}x = \int f\ \mathrm{d}x$$

□

Bemerkung:
Für eine messbare Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$ ist also $a + B$ messbar und $v(a+B) = v(B)$

Lemma 2 02. Dezember 2010

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $f : A \to \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig, d.h. es existiert ein $L \in \mathbb{R}^+$ mit $||f(x) - f(y)|| \leq L \cdot ||x - y|| \quad \forall x, y \in A$. Dann ist auch $f[A]$ eine Nullmenge.

Beweis:
Nach Normäquivalenzsatz existiert auch $c \in \mathbb{R}^+$ mit $||f(x) - f(y)||_\infty \leq c \cdot ||x - y||_\infty \quad \forall x, y \in A$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach (Beweis von) Satz 24 aus §16 gibt es eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Würfeln mit $A \subseteq \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} Q_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert dann ein Würfel W_k mit $f[Q_k] \subseteq U_k$ und $v(W_k) \leq (2c)^n \cdot v(Q_k)$. Also $f[A] \subseteq \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} W_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v(W_k) \leq (2c)^n \cdot \varepsilon$. Somit ist $f[A]$ eine Nullmenge.

□

Schrankensatz: $||f(x) - f(y)|| \leq \sup\{||f'(Z)|| \mid Z \in [x, y]\} \cdot ||x - y||$

Korollar

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ist dann $A \subseteq U$ eine Nullmenge, so ist auch $f[A]$ eine Nullmenge.

Beweis:
Wähle wieder eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von kompakten Quadern mit $U = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} Q_k$. Nach dem Schrankensatz ist dann für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Einschränkung von f auf Q_k lipschitz-stetig. Somit ist anch Lemma 2 $f[A \cap Q_k]$ eine Nullmenge. Somit ist auch $f[A] = \overset{=}{\underset{A}{\bigcup}} \overset{f}{\underset{k\in\mathbb{N}}{\bigcup}} [A \cap Q_k]$ eine Nullmenge.

□

Lemma 3

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum mit $\dim(A) < n$. Dann ist A eine Nullmenge.

Beweis:
.Setze $B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$. B ist eine Nullmenge, denn B ist Vereinigung von abzählbar vielen ausgearteten Quadern.
Sei A erzeugt von $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Definiere $f : B \to \mathbb{R}^n$ durch $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_i \cdot u_i$, f ist lipschitz-stetig. Also ist nach Lemma 2 $A = f[B]$ eine Nullmenge.

□

Seien $u_1, \ldots, u_n$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Setze $P(u_1, \ldots, u_n) = \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \mid 0 \leq \lambda_1, \ldots, \lambda_n \leq 1\right\}$.
$P(u_1, \ldots, u_n)$ ist das von $u_1, \ldots, u_n$ aufgespannte Parallelotop.
$P(u_1, \ldots, u_n)$ ist also das Bild des Einheitswürfels $[0, 1]^n$ unter der linearen Abbildung $A = (u_1, \ldots, u_n)$.
Somit ist auch der folgende Satz im wesentlichen ein Spezialfall des Transformationssatzes.

Satz 4

Für alle $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ gilt $v(P(u_1, \ldots, u_n)) = |\det(u_1, \ldots, u_n)|$

Beweis:
Nach linearer Algebra ist die Funktion $D = |\det|$eindeutig bestimmt duch die fünf Eigenschaften:

(D1) $D(u_1, \ldots, \lambda u_i, \ldots, u_n) = |\lambda| D(u_1, \ldots, u_n)$

(D2) $D(u_1 + u_2, u_2, \ldots, u_n) = D(u_1, \ldots, u_n)$ für $n \geq 2$

(D3) $D(e_1, \ldots, e_n) = 1$

(D4) $D(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = D(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$ für $1 \leq i < j \leq n$

(D5) $D(u_1, \ldots, u_n) = 0$ falls $u_1, \ldots, u_n$ linear abhängig.

Also genügt es zu zeigen, dass die Funktion $(u_1, \ldots, u_n) \mapsto v(P(u_1, \ldots, u_n))$ diese Eigenschaften besitzt.

(D3) ist klar, da $P(e_1, \ldots, e_n) = [0, 1]^n$
(D4) ist klar, da $P(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = P(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$
(D5) gilt nach Lemma 3

zu (D1):
Setze $P_\lambda = P(u_1, \ldots, \lambda u_i, \ldots, u_n)$. Wir zeigen die Behauptung zuerst für $\lambda = k \in \mathbb{N}$ durch Induktion.
Für $k = 0$ ist dies klar.
Nun ist $P_{k+1} = P_k \cup (ku_i + P_1)$ und der Durchschnitt der letzten beiden Mengen ist nach Lemma 3 eine Nullmenge. Wegen Satz 1 folgt also

$$v(P_{k+1}) = v(P_k) + v(P_1) = (k+1)v(p)$$

Somit gilt aber die Behauptung auch für $\lambda \in \mathbb{Q}^+$, denn ist $\lambda = \dfrac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, so $v(P_{q\lambda}) = pv(P_1)$ und $v(P_{q\lambda}) = qv(P_\lambda)$.
Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $r, s \in \mathbb{Q}^+$ mit $r \leq \lambda \leq s$ und $s - r \leq \dfrac{\varepsilon}{v(P)}$. Dann gilt $P_r \subseteq P_\lambda \subseteq P_s$ und somit

$$r \cdot v(P) \leq v(P_r) \leq v(P_\lambda) \leq v(P_s) = s\dot{v}(P)$$

also auch $|v(P_\lambda) - \lambda v(P)| \leq (s-r)v(P) \leq \varepsilon$
Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.
Sei schließlich $\lambda < 0$. Wegen $P_\lambda = \lambda u_i + P_{-\lambda}$ erhält man mit Satz 1 $v(P_\lambda) = v(P_{-\lambda}) = |\lambda| \cdot c(P)$

zu (D2):
Setze $\Delta_0 = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \mid 0 \leq \lambda_1, \ldots, \lambda_k \leq 1 \text{ und } \lambda_2 \leq \lambda_1 \right\}$
und $\Delta_1 = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \mid 0 \leq \lambda_1, \ldots, \lambda_k \leq 1 \text{ und } \lambda_1 \leq \lambda_2 \right\}$
Dann gilt $P(u_1, \ldots, u_n) = \Delta_0 \cup \Delta_1$

$$P(u_1 + u_2, u_2, \ldots, u_n) = (u_2 + \Delta_0) \cup \Delta_1$$

Da $\Delta_0 \cap \Delta_1$ und $(u_2 + \Delta_0) \cap \Delta_1$ nach Lemma 3 Nullmenge sind, folgt also nach Satz 1 die Behauptung.

$\square$

Korollar

Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann ist für jeden Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$

$$v(A[Q|) = |\det A| \cdot v(Q)$$

Beweis:
Sei $A = (u_1, \ldots, u_n)$, also $u_k = Ae_k$. Weiterhin sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. o.E. sei Q abgeschlossen. Außerdem können wir o.E. annehmen, dass $Q = [0, \lambda_1] \times \cdots \times [0, \lambda_n]$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$, denn sonst bringe Q durch Translation in diese Form und beachte, dass $A[x + Q] = Ax + A[Q]$. Dann gilt aber $A[Q] = P(\lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_n u_n)$ also $v(A[Q]) = |\det(\lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_n u_n)| = |\det(u_1, \ldots, u_n)| \cdot \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n = |\det(A)| v(Q)$.

□

07. Dezember 2010

Lemma 5

Sei $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus und sei $W \subseteq U$ ein kompakter Würfel. Setze $c = \max\{|\det \varphi'(x)| \mid x \in W\}$. Dann gilt

$$v(\varphi[W]) \leq c \cdot v(W)$$

Beweis:
Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$. $\varphi[W]$ ist kompakt, also integrierbar. Ist $v[W] = 0$, so folgt die Behauptung aus dem Korollar zu Lemma 2. Sei also $v(W) \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $v(\varphi[W]) = \alpha \cdot v(W)$. Wir müssen zeigen, dass $\alpha \leq c$. Konstruiere nun rekursiv eine Folge $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von kompakten Würfeln mit

$$(*) \quad v(\varphi[W_k]) \geq \alpha \cdot v(W_k)$$

wie folgt.
Setze $W_0 = W$. Zur Konstruktion von W_{k+1} „zerlege“ W_k in 2^n viele kompakte Teilwürfel von halber Kantenlänge. Unter diesen gibt es dann mindestens einen Würfel W_{k+1} mit $v(\varphi[W_{k+1}]) \geq \alpha \cdot v(W_{k+1})$.
Nach Konstruktion besteht $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} W_k$ aus genau einem Punkt a. Setze $b = \varphi(a)$. Wegen Translationsinvarianz können wir o.E. $a = b = 0$ annehmenb. Sei m_k der Mittelpunkt von W_k, und d die halbe Kantenlänge von W. Nach Konstruktion ist dann $W_k = \{x \mid ||x - m_k||_\infty \leq 2^{-k} d\}$. Wegen $0 = a \in W_k$ gilt $||m_k||_\infty \leq 2^{-k} d$. Sei $A = \varphi'(0)$. Wegen $\varphi(0) = 0$ existiert dann eine in 0 stetige Funktion $r^* : U \to \mathbb{R}^n$ mit $r^*(0) = 0$ und $\varphi(x) = A \cdot x + r^*(x) \cdot ||x||_\infty$.
Definieren wir also $r : U \to \mathbb{R}^n$ durch $r(x) = A^{-1} \cdot r^*(x)$, so gilt auch $r(0) = 0$ und $\lim\limits_{x \to 0} r(x) = 0$ sowie

$$(**) \quad \varphi(x) = A \cdot (x + r(x) \cdot ||x||_\infty)$$

$$(***) \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit}$$

$$V_k := \{x + r(x) \cdot ||x||_\infty \mid x \in W_k\} \subseteq W_{k,\varepsilon} := \{z \mid ||z - m_k||_\infty \leq 2^{-k} \cdot d \cdot (1 + \varepsilon)\}$$

Zum Beweis von $(***)$ sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim\limits_{x \to 0} r(x) = 0 = r(0)$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $||r(x)||_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in W_k$. Wegen $||x||_\infty \leq 2 \cdot 2^{-k} d$ für $x \in W_k$ ist dann für $x \in W_k$

$$||x + r(x) \cdot ||x||_\infty - m_k||_\infty \leq ||x - m_k||_\infty + ||r(x)||_\infty \cdot ||x||_\infty \leq 2^{-k} d + \varepsilon \cdot 2^{-k} d = 2^{-k} d(1 + \varepsilon)$$

Also $V_k \subseteq W_{k,\varepsilon}$ und somit $(***)$ gezeigt.
Ist aber $V_k \subseteq W_{k,\varepsilon}$, so folgt

$$\varphi[W_k] \overset{(**)}{=} A[V_k] \subseteq A[W_{k,\varepsilon}]$$

und somit

$$v(\varphi[W_k]) \leq v(A[V_k]) \leq v(A[W_{k,\varepsilon}]) \underset{zu\ L.\ 4}{\overset{Korollar}{=}} |\det A| \cdot v(W_{k,\varepsilon}) = (1+\varepsilon)^n \cdot |\det A| \cdot v(W_k) \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon)^n \cdot c \cdot v(W_k)$$

Wir müssen zeigen, dass $\alpha \leq c$. Nehme an, dass $c < \alpha$. Wähle dann $\varepsilon > 0$ so klein, dass auch $(1+\varepsilon)^n \cdot c < \alpha$ gilt. Wähle hierzu k wie in $(***)$. Dann gilt nach oben

$$v(\varphi[W_k]) < \alpha \cdot v(W_k)$$

Dies ist ein Widerspruch zu $(*)$.

□

Wir brauchen noch einige topologische Definitionen.

Definition

Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt Randpunkt von A, wenn in jeder Umgebung von x sowohl ein Punkt von A als auch ein Punkt von $X \setminus A$ liegt. Die Menge aller Randpunkte von A bezeichenn wir mit ∂A.

Satz 6

Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt

(a) ∂A ist abgeschlossen.

(b) $A \setminus \partial A$ ist offen.

(c) $A \cup \partial A$ ist abgeschlossen.

Beweis:
zu (b):
Sei $a \in A \setminus \partial A$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von a mit $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$, d.h. $U \subseteq A$. Wegen U offen ist aber dann kein $x \in U$ Randpunkt von A. Also $U \subseteq A \setminus \partial A$.

zu (c):
Sei $B = X \setminus A$. Nach Definition ist $\partial A = \partial B$, also ist nach (b) $B \setminus \partial A$ offen. Aber $X \setminus (B \setminus \partial A) = (X \setminus B) \cup \partial A = A \cup \partial A$.

zu (a):
Es ist $\partial A = (A \cup \partial A) \setminus (A \setminus \partial A)$, also ist $X \setminus \partial A = (X \setminus (A \cup \partial A)) \cup (A \setminus \partial A)$, was nach (b), (c) offen ist.

□

Für $A \subseteq X$ wie oben setze noch

$$\mathrm{Int}(A) = A \setminus \partial A \quad \text{(das \underline{Innere} von } A)$$
$$\overline{A} = A \cup \partial A \quad \text{(die \underline{abgeschlossene Hülle} von } A)$$

Bemerkung:
A ist offen genau dann, wenn $A = \mathrm{Int}(A)$.
A ist abgeschlossen genau dann, wenn $A = \overline{A}$.

Wir beweisen nun folgende Verstärkung von Lemma 5:

Lemma 7

Sei $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus und sei $K \subseteq U$ eine nichtleere kompakte Menge, deren Rand eine Nullmenge ist. Setze

$$c = \min\{|\det \varphi'(x)| \mid x \in K\}$$

und

$$d = \max\{|\det \varphi'(x)| \mid x \in K\}$$

Dann gilt $cv(K) \leq v(\varphi[K]) \leq dv(K)$

Beweis:
nach Lemma 25 aus §16 existiert eine Folge $W_0, W_1, \ldots$ von kompakten Würfeln, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben mit $\mathrm{Int}(K) = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} W_k$. Da ∂K eine Nullmenge ist, gilt dann:

$$(1) \quad v(K) = v(\mathrm{Int}(K)) = \sum_{k=0}^{\infty} v(W_k)$$

Da φ ein Diffeomorphismus ist, bildet φ nach Analysis II offene Mengen auf offene Mengen ab. Somit ist $\varphi[\mathrm{Int}(x)] = \mathrm{Int}\varphi[K]$ und daher auch $\varphi[\partial K] = \partial\varphi[K]$. Somit ist nach Korollar zu Lemma 2 $\partial\varphi[K]$ eine Nullmenge und auch $\varphi[W_i] \cap \varphi[W_j] = \varphi[W_i \cap W_j]$ sind für $i \neq j$ Nullmengen. Somit erhalten wir

$$(2) \quad v(\varphi[K]) = v(\mathrm{Int}\varphi[K]) = \sum_{k=0}^{\infty} v(\varphi[W_k])$$

Nach Lemma 5 gilt aber für jedes $k \in \mathbb{N}$ $v(\varphi[W_k]) \leq d \cdot v(W_k)$. Aus (1) und (2) folgt dann $v(\varphi[K] \leq d \cdot v(K)$

09. Dezember 2010

Die rechte Ungleichung haben wir bewiesen. Um die linke Ungleichung zu erhalten, wenden wir das schon gezeigte Resultat auf die kompakte Menge $\varphi[K]$ und den Diffeomorphismus φ^{-1} an. Setzen wir also

$$b = \max\{\left|\det((\varphi^{-1})'(\varphi(x)))\right| x \in K\}$$

so gilt $v(K) \leq b \cdot v(\varphi[K])$. Für $x \in K$ ist aber $(\varphi^{-1})'(\varphi(x)) = \varphi'(x)^{-1}$ und somit $\det((\varphi^{-1})(\varphi(x))) = (\det \varphi'(x))^{-1}$. Also ist $b = \frac{1}{c}$. Somit $cv(K) \leq v(\varphi[K])$.

$\square$

Für eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei der Träger $\mathrm{Tr}(h)$ von h definiert durch

$$\mathrm{Tr}(h) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \neq 0\}$$

Lemma 8

Sei f integrierbar über die offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion g mit $\mathrm{Tr}(g) \subseteq V$ und $||f_V - g||_1 < \varepsilon$.

Beweis:
Sei zuerst h eine Treppenfunktion mit $||f_V - h||_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Wegen $|f_V - 1_V h| \leq |f_V - h|$ gilt dann auch $||f_V - 1_V h|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei nun U eine beschränkte offene Menge mit $\mathrm{Tr}(h) \subseteq U$, und sei $c > 0$ eine obere Schranke für (h). Nach Lemma 25 aus §16 existieren endlich viele kompakte Quader $Q_0, \ldots, Q_n \subseteq U \cap V$, so dass für $A = \bigcup_{k=0}^{m} Q_k$ gilt $v(U \cap V) - v(A) < \frac{\varepsilon}{2c}$. Dann ist $g := 1_A h$ eine Treppenfunktion mit $\mathrm{Tr}(g) \subseteq V$ und

$$||1_V h - g||_1 = ||1_{U\cap V} h - 1_A h||_1 \leq c \cdot (v(U \cap V) - v(A)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

□

Wir können nun den Transformationssatz beweisen:

Satz 9 (Transformationssatz)

Sei $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Weiterhin sei $f : V \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist die Funktion $(f \circ \varphi) \cdot (\det \varphi'(x))$ über U integrierbar, und es gilt

$$\int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det \varphi'(x)| \, \mathrm{d}x = \int_V f(y \, \mathrm{d}y$$

Beweis:
Wir zeigen die Behauptung zuerst für den Fall, dass f_V eine Treppenfunktion mit $\mathrm{Tr}(f) \subseteq V$ ist. Wegen Linearität können wir aber dann sogar annehmen, dass $f_V = 1_Q$ für einen Quader Q mit $\overline{Q} \subseteq V$.
Da ∂Q eine Nullmenge ist und somit nach Korollar zu Lemma 2 auch $\varphi[\partial Q]$, können wir weiterhin annehmen, dass Q abgeschlossen, also kompakt ist.
Da $|\det \varphi'|$ stetig und $\varphi^{-1}[Q]$ kompakt ist, ist $(1_Q \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'|$ über $\varphi'[Q]$ und also auch über U integrierbar. Somit ist nur noch zu zeigen:

$$\int_{\varphi^{-1}\uparrow Q} |\det \varphi'(x)| \, \mathrm{d}x = \int_Q 1 \, \mathrm{d}y (= v(Q))$$

Setze $\psi = \varphi^{-1}$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $|\det \psi'|^{-1}$ auf der kompakten Menge Q gleichmäßig stetig ist, gibt es eine „Zerlegung“ $Q = Q_0 \cup \cdots \cup Q_n$ in kompakte Quader, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben, so dass gilt

$$\max\{|\det \psi'(y)|^{-1} \mid y \in Q_i\} - \min\{|\det \psi'(y)|^{-1} \mid y \in Q_i\} \leq \varepsilon \text{ für } i \leq m$$

Setze nun $K_i = \psi[Q_i], c_i = \min\{|\det \varphi'(x)| \mid x \in K_i\}, d_i = \max\{|\det \varphi'(x)| \mid x \in K_i\}$.
Wegen $\varphi'(\psi(x)) = (\psi'(x))^{-1}$ gilt dann $d_i - c_i \leq \varepsilon$ für $i \leq m$.
Nach Lemma 7 gilt

$$c_i \cdot v(K_i) \leq v(Q_i) \leq d_i \cdot v(K_i)$$

Natürlich gilt auch

$$c_i \cdot v(K_i) \leq \int\limits_{K_i} |\det \varphi'(x)| \, \mathrm{d}x \leq d_i \cdot v(K_i)$$

Also folgt

$$\left| \int\limits_{K_i} |\det \varphi'(x)| \, \mathrm{d}x - v(Q_i) \right| \leq (d_i - c_i) \cdot v(K_i) \leq \varepsilon \cdot v(K_i)$$

Da für $i \neq j$ $K_i \cap K_j = \psi[Q_i \cap Q_j]$ nach Korollar zu Lemma 2 eine Nullmenge ist, erhält man durch Summation

$$\left| \int\limits_{\psi[Q]} |\det \varphi'(x)| \, \mathrm{d}x - v(Q) \right| \leq \varepsilon \cdot v(\psi[Q])$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.
Sei nun f eine beliebige integrierbare Funktion. Nach Lemma 8 gibt es dann eine Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{k\to\infty} ||f_V - g_k||_1 = 0$ und $\mathrm{Tr}(g_k) \subseteq V$. Wegen Satz 1 aus §17 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ außerhalb einer Nullmenge $A \subseteq V$ punktweise gegen f_V konvergiert. Setze nun $\tilde{g}_k := (g_k \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'|$, $\tilde{f} := (f_V \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'|$. Nach dem oben Gezeigten ist $\tilde{g}_k$ über U integrierbar, und wenn wir das oben Gezeigte auf die Treppenfunktion $|g_k - g_m|$ anwenden, erhalten wir

$$||\tilde{g}_k - \tilde{g}_m||_1 = \int\limits_U |\tilde{g}_k - \tilde{g}_m| \, \mathrm{d}x = \int\limits_V |g_k - g_m| \, \mathrm{d}y = ||g_k - g_m||_1$$

Somit ist $(\tilde{g}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine L^1 -Cauchyfolge. Weiterhin konvergiert $(\tilde{g}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ außerhalb der Nullmenge $\varphi^{-1}[A]$ punktweise gegen $\tilde{f}$. Somit ist nach Satz 1 $\tilde{f}$ integrierbar, und es gilt

$$\int\limits_U \tilde{f}(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int\limits_U \tilde{g}_k(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int\limits_V g_k(y) \, \mathrm{d}y = \int\limits_V f(y) \, \mathrm{d}y$$

$\square$

<u>Bemerkung:</u>
Wenn man den Transformationssatz auf φ^{-1} anwendet, erhält man umgekehrt aus der Integrierbarkeit von $(f \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'|$ auch die Integrierbarkeit von f

<u>Beispiel:</u> (Polarkoordinaten)
Sei $r > 0$ und setze $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| \leq r\}$ (der abgeschlossene Kreis mit dem Radius r um den Nullpunkt). Wir wollen $v(K)$ berechnen.

Setze hierzu $U = (0, r) \times (0, 2\pi)$. U ist offen.
Definiere $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ durch $\varphi(s,t) = (s \cos t, s \sin t)$. Sei $V = \varphi[U]$.
Es ist $V \subseteq K$ und $K \setminus V = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = r\} \cup \{(s,0) \mid 0 \leq s \leq r\}$.
Also (!) ist $K \setminus V$ eine Nullmenge und daher $v(K) = v(V)$. φ ist injektiv. Um zu zeigen, dass $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist, berechnen wir $\det \varphi'(s,t)$. Es ist

$$\varphi'(s,t) = \begin{pmatrix} \cos t & -s \sin t \\ \sin t & s \cos t \end{pmatrix}$$

also

$$\det(\varphi'(s,t)) = s \cos^2 t + s \sin^2 t = s > 0 \text{ für } (s,t) \in U$$

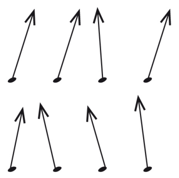
Somit ist φ ein Diffeomorphismus, und nach Transformationssatz und Fubini gilt

$$v(V) = \int_V 1 \, \mathrm{d}y = \int_U s \, \mathrm{d}(s,t) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r s \, \mathrm{d}s \right) \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \, \mathrm{d}t = \pi r^2$$

§19 1-Formen, Kurvenintegrale

Frage:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Gibt es dann eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $g = f'$?
Eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}^n$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnet man auch als Vektorfeld auf U. Für $n = 2$ kann man solch ein g gut darstellen.



Statt mit Vektorfeldern arbeiten wir im Folgenden jedoch mit einer äquivalenten Darstellung. Wir identifizieren $\mathbb{R}^n$ mit dem Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$. $(\mathbb{R}^n)^*$ besteht aus den linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. $(\mathbb{R}^n)^*$ ist kanonisch isomorph zu $\mathbb{R}^n$

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine 1-Form auf U ist eine Abbildung $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$. Ist also $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so „ist“ $f' : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ eine 1-Form.
Bei dieser Auffassung schreiben wir $\mathrm{d}f$ für f'.

Sei n fest. Für $1 \leq i \leq n$ definiere die i-te Projektion $\lambda_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $\lambda_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Dann ist $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die kanonische Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$.
λ_i ist differenzierbar und es gilt $\mathrm{d}\lambda_i(x) = \lambda_i$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir benutzen nun die Notation

$$\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}\lambda_i$$

Ist $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ eine 1-Form, so existieren eindeutig Funktionen $f_1, \dots, f_n : U \to \mathbb{R}$ mit $\omega(x) = \sum\limits_{i=1}^n f_i(x) \cdot \lambda_i$ für alle $x \in U$.
Wir schreiben das etwas ungenau als $\omega = \sum\limits_{i=1}^n f_i \mathrm{d}x_i$

Bemerkung:
Wir können ω mit dem Vektorfeld $f = (f_1, \dots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ identifizieren.

Beispiel:
Sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $b = f'(x)$. Dann gilt für alle $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$b \cdot y = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot y_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) y_n, \text{ d.h.}$$

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \lambda_i$$

Somit ist

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \mathrm{d}x_i$$

Beachte, dass $(\mathbb{R}^n)^*$ mit der durch die Abbildungsnorm induzierten Metrik ein normierter Raum ist. Also ist klar, was es bedeutet, dass eine 1-Form stetig ist.

Definition

Sie $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathrm{d}x_i$ eine 1-Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$. ω ist (stetig) differenzierbar, wenn $f_1, \dots, f_n$ (stetig) differenzierbar sind.

Bemerkung:
Ist ω differnezierbar, so ist ω stetig.

Notation:

Ist $v \in (\mathbb{R}^n)^*$ und $w \in \mathbb{R}^n$, so sei $vw = v(w)$

Definition

Sei ω eine 1-Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$. Dann ist f eine Stammfunktion von ω, wenn f differenzierbar ist und es gilt $\omega = \mathrm{d}f$.

Bemerkung:
Nach Analysis II gilt:
Ist U zusammenhängend und sind f, g Stammfunktionen von ω, so ist $f - g$ konstant.
In der Analysis I erhalten wir Stammfunktionen von stetigen Funktionen durch Integration. Dies wird auch hier, wenn sie existieren, der Fall sein. Wir benötigen aber Integrale längs Kurven.

Notation:

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $A \subseteq X$. Setze $f \restriction A =$ die Einschränkung von f auf A.

Definition

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. γ ist stückweise stetig differenzierbar, wenn es eine Zerlegung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ von $[a, b]$ gibt, so dass für alle $i \leq k : \gamma \restriction [a_i, a_{i+1}]$ stetig differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so nennen wir γ eine Integrationskurve.
Sei nun ω eine stetige 1-Form auf U und $\gamma : [a, b] \to U$ eine Integrationskurve. Wir definieren das Integral $\int_\gamma \omega$ längs ω wie folgt: Sei $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so dass für alle $i < k : \gamma \restriction [a_i, a_{i+1}]$ stetig differenzierbar ist. Definiere dann $\gamma' : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma'(t) & \text{falls } t \notin \{a_0, \dots, a_n\} \\ 0 & \text{falls } t = a_i \text{ für ein } i \end{cases}$$

und setze

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t$$

Ist also $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i[x_i]$ und $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$, so gilt

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t$$

Dies ist eine Verallgemeinerung des üblichen endlichdimensionalen Integrals.
Denn ist $\omega = f \mathrm{d}x$ eine stetige 1-Form auf dem Intervall (a, b) und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Identität, so ist

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$$

16. Dezember 2010

$\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ stetige 1-Form, $\gamma : [a, b] \to U$ Integrationskurve.
Sei etwa $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i[x_i]$.

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) \, \mathrm{d}t$$

Bemerkung:

(1)
$$\int_\gamma c_1\omega_1 + c_2\omega_2 = c_1 \int_\gamma \omega_1 + c_2 \int_\gamma \omega_2$$

(2) Ist $\gamma : [a, c] \to U, a \leq b \leq c$, $\beta = \gamma \restriction [a, b], \delta = \gamma \restriction [b, c]$, so

$$\int_\gamma \omega = \int_\beta \omega + \int_\delta \omega$$

(Sind β, γ, δ wie oben, so schreibe $\gamma = \beta \otimes \delta$)

(3) Ist $\gamma : [a, b] \to U$ und $\gamma^- : [a, b] \to U$ definiert durch $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$, so gilt

$$\int_{\gamma^-} \omega = -\int_\gamma \omega$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

Satz 1

Sei f eine Stammfunktion der stetigen 1-Form $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$. Dann gilt für jede Integrationskurve $\gamma : [a, b] \to U$

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Beweis:
Wir können o.E. annehmen, dass γ stetig differenzierbar ist. Dann ist $f \circ \gamma$ differenzierbar und nach Kettenregel gilt $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ für $t \in [a, b]$. Somit nach Hauptsatz

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \mathrm{d}f = \int_a^b f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ \mathrm{d}t = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

$\square$

Hiermit können wir schon zeigen, dass gewisse stetige 1-Formen eine Stammfunktion besitzen.

Beispiel:
Sei $\omega = y^1 \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t,t)$, $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \delta(t) = (t, t^2)$

Da $\gamma(0) = \delta(0), \gamma(1) = \delta(1)$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 t^2\ \mathrm{d}t + \int_0^1\ \mathrm{d}t = \frac{4}{3} \qquad \int_\delta = \int_0^1 t^4\ \mathrm{d}t + 2\int_0^1 t\ \mathrm{d}t = \frac{6}{5}$$

Also hat nach Satz 1 ω keine Stammfunktion.

Definition

Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ist geschlossen wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Wir haben folgendes Kriterium für die Existenz einer Stammfunktion:

Satz 2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und ω eine stetige 1-Form auf U. Dann sind äquivalent:

(1) ω besitzt eine Stammfunktion

(2) Für jede geschlossene Integrationskurve $\gamma : [a, b] \to U$ gilt $\int_\gamma \omega = 0$

(3) Für je zwei Inegrationskurven $\gamma : [a, b] \to U$ und $\delta : [c, d] \to U$ mit $\gamma(a) = \delta(c)$ und $\gamma(b) = \delta(d)$ gilt

$$\int_\gamma \omega = \int_\delta \omega$$

Beweis:
(1)→(2) folgt aus Satz 1

(2)→(3)
Seien γ, δ wie in (3). Setze $e = b + (d - c)$.
Definiere $\beta : [a, e] \to U$ durch $\beta(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{falls } a \leq t \leq b \\ \delta(d + b - t) & \text{falls } b \leq t \leq e \end{cases}$
Dann ist β geschlossen. Also nach (3)

$$0 = \int_\beta \omega = \int_\gamma \omega - \int_\delta \omega$$

(3)→(1)
Sei o.E. $U \neq \emptyset$. Wähle einen festen Punkt $a \in U$. Nach Analysis II existiert für jedes $x \in U$ ein Streckenzug S von a nach x mit $S \subseteq U$. Somit existiert für jedes $x \in U$ eine Integrationskurve $\gamma_x : [c_x, d_x] \to U$ mit $\gamma_x(c_x) = a$ und $\gamma_x(d_x) = x$.
Definiere nun $F : U \to \mathbb{R}$ durch $F(x) = \int\limits_{\gamma_x} \omega$. Nach (3) hängt diese Definition nicht von der speziellen Wahl von γ_x ab. Wir können also schreiben:

$$F(x) = \int_a^x \omega$$

Wir zeigen, dass F eine Stammfunktion von ω ist. Sei hierzu $\omega = \sum\limits_{i=1}^n f_i \mathrm{d}x_i$. Es genügt zu zeigen, dass F partiell differenzierbar ist und $D_i F = f_i$ für $1 \leq i \leq n$ gilt.
Seien hierzu $1 \leq i \leq n$ und $x \in U$. Für genügend kleine $h \neq 0$ gilt dann

$$F(x + he_i) = \int_a^x \omega + \int_x^{x+he_i} \omega$$

und somit

$$F(x + he_i) - F(x) = \int_x^{x+he_i} \omega$$

Letzteres Integral berechnen wir mit der Kurve $\delta_h : [0, 1] \to U$, die definiert ist durch $\delta_h(t) = x + the_i$. Wegen $\delta_h'(t)) = he_i$ ist $\omega(\delta_h(t)) \cdot \delta_h'(t) = hf_i(\delta_h(t))$, also

$$\int_{\delta_h} = h \int_0^1 f_i(x + the_i) \mathrm{d}t$$

Somit

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x + he_i) - F(x)}{h} = \int_0^1 f_i(x + the_i)\ \mathrm{d}t \overset{(1)}{=} f_i(x)$$

(1): nach Mittelwertsatz und Stetigkeit von f_i

□

Der Beweis von Satz 2 liefert auch ein Verfahren, wie man eine Stammfunktion findet, falls eine existiert.

Beispiel:
Sei $\omega = (2x - y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$
Wähle $(0,0)$ als Startpunkt. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ definiere die Kurve $\gamma_{(x,y)} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$ nach (x,y) durch $\gamma_{(x,y)}(t) = t \cdot (x,y)$. Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \int\limits_{\gamma_{(x,y)}} \omega = \int\limits_0^1 ((2tx - ty) \cdot x - txy) \ \mathrm{d}t = (2x^2 - 2xy) \cdot \int\limits_0^1 t \ \mathrm{d}t = x^2 - xy$$

Prüfe dann nach, ob $\mathrm{d}f = \omega$. Hier ist $D_1 f = 2x - y, D_2 f = -x$, also $\mathrm{d}f = \omega$.

21. Dezember 2010

Definition

Sei $\omega = \sum\limits_{i=1}^n f_i \mathrm{d}x_i$ eine stetig differenzierbare 1-Fortm auf U. ω ist geschlossen, wenn

$$D_i f_j = D_j f_i \qquad \forall 1 \le i,j \le n$$

Bemerkung:
Sei ω eine stetig differenzierbare 1-Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Besitzt ω eine Stammfunktion, so ist ω geschlossen.

Beweis:
Sei $g : U \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω. Dann ist g zweimal stetig differenzierbar. Also gilt nach Analysis II für $1 \le i,j \le n$

$$D_i f_j = D_i D_j g = D_j D_i g = D_j f_i$$

□

Mit dieser Bemerkung kann man für viele 1-Formen leicht feststellen, dass sie keine Stammfunktion besitzten. Betrachten wir etwa unser früheres Beispiel $\omega = y^2 \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$. Hier ist

$$\frac{\partial y^2}{\partial y} = 2y \qquad\qquad oder \frac{\partial 1}{\partial x} = 0$$

Für beliebige offene U gilt nicht, dass jede geschlossene 1-Form auf U eine Stammfunktion besitzt. Ein Beispiel siehe Übung. Aber für viele U ist dies richtig. Hierzu folgende Definition:

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. U ist sternförmig, wenn es ein $a \in U$ mit $[a, x] \subseteq U$ für alle $x \in U$ gibt.

Satz 3 (Poincarésches Lemma)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. Dann besitzt jede gelschlossene 1-Form auf U eine Stammfunktion.

Beweis:
Sei $a \in U$ mit $[a, x] \subseteq U$ für alle $x \in U$. Nach Translation können wir o.E. annehmen, dass $a = 0$. Sei $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathrm{d}x_i$ eine geschlossene 1-Form auf U. Für $x \in U$ sei $\gamma_x : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\gamma_x(t) = tx$ γ_x ist also eine Parametrisierung von $[0, x]$.
Definiere nun $f : U \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t \cdot x) \cdot x_i \right) \mathrm{d}t$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$. Wir zeigen, dass f eine Stammfunktion von ω ist. Nach Analysis II ist f differenzierbar, und für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$D_k f(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(tx) x_i \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f_i \right) (tx) x_i t + f_k(tx) \right) \mathrm{d}t \overset{\text{da } \omega \text{ geschlossen}}{=}$$

$$= \int_0^1 \left(t \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f_k \right) (tx) \cdot x_i + f_k(tx) \right) \mathrm{d}t \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_0^1 \left(t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_k \right) (tx) + f_k(tx) \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (t f_k(tx)) \, \mathrm{d}t = f_k(x)$$

□

Korollar

Sei ω eine stetig differenzierbare 1-Form auf U. Dann ist ω genau dann geschlossen, wenn es für alle $x \in U$ eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von x gibt, so dass $\omega \restriction V$ eine Stammfunktion besitzt.

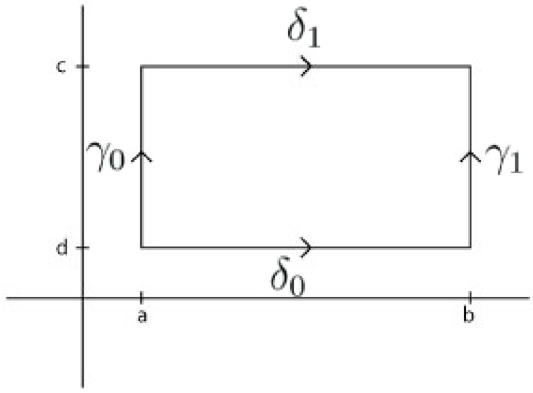
Beweis:
Ist die rechte Seite erfüllt, so folgt genau wie in der obigen Bemerkung, dass ω geschlossen ist. Sei andererseits ω geschlossen und $x \in U$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit Kugel $U_\varepsilon(x) \subseteq U$. $U_\varepsilon(x)$ ist sternförmig. Also besitzt $\omega \restriction U_\varepsilon(x)$ nach Satz 3 eine Stammfunktion.

□

Hier endet der klausurrelevante Teil des Stoffs!

§20 Differentialformen, Satz von Stokes

Der Satz von Stokes ist eine Verallgemeinerung der Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Satz 1 aus §19 ist ein Spezialfall hiervon. Zur Motivation beweisen wir zuerst noch einen weiteren Spezialfall. Sei hierzu $Q = [a,b] \times [c,d]$ ein kompakter Quader im $\mathbb{R}^2$ und $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $Q \subseteq U$.



Wir parametrisieren den „orientierten“ Rand von Q durch die folgenden vier Kurven $\gamma_0, \gamma_1, \delta_0, \delta_1$, die definiert werden durch

$$\gamma_0 : [c,d] \to U, \gamma_0(t) = (a,t)$$

$$\gamma_1 : [c,d] \to U, \gamma_1(t) = (b,t)$$
$$\delta_0 : [a,b] \to U, \delta_0/t) = (t,c)$$
$$\delta_1 : [a,b] \to U, \delta_1(t) = (t,d)$$

Längs dieser Kurven können wir eine 1-Form auf U integrieren. Sei also $\omega = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$ eine stetig differenzierbare 1-Form auf U. Wir setzen

$$\int\limits_{\partial Q} \omega := -\int\limits_{\gamma_0} \omega + \int\limits_{\delta_0} \omega + \int\limits_{\gamma_1} \omega - \int\limits_{\delta_1} \omega$$

Wir integrieren also ω längs des Randes von Q im Gegenuhrzeigersinn. Nun wollen wir $\int\limits_{\partial Q} \omega$ berechnen als Integral einer „Ableitung“ $\mathrm{d}\omega$ von ω über Q. Es stellt sich heraus, dass wir $\mathrm{d}\omega$ definieren müssen durch:

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

Wir wollen also hiermit zeigen

$$\int\limits_Q \mathrm{d}\omega = \int\limits_{\partial Q} \omega$$

Hierzu mit Fubini und Hauptsatz

$$\int\limits_Q \mathrm{d}\omega = \int\limits_c^d \int\limits_a^b \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = \int\limits_c^d \int\limits_a^b \frac{\partial g}{\partial x} \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y - \int\limits_a^b \int\limits_c^d \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_c^d (g(b,y) - g(a,y)) \ \mathrm{d}y - \int\limits_a^b (f(x,d) - f(x,c)) \ \mathrm{d}x$$

Nun ist aber wegen $\gamma_i'(t) = (0,1), \delta_i'(t) = (1,0)$.

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_c^d g(b,y)\ \mathrm{d}y \qquad \int_{\gamma_0} \omega = \int_c^d g(a,y)\ \mathrm{d}y$$

$$\int_{\delta_1} \omega = \int_a^b f(x,d)\ \mathrm{d}x \qquad \int_{\delta_0} \omega = \int_a^b f(x,c)\ \mathrm{d}x$$

Somit haben wir

$$\int_Q \mathrm{d}\omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_0} \omega - \int_{\delta_1} \omega + \int_{\delta_0} \omega = \int_{\partial Q} \omega$$

Wir wollen dies nun auf höhere Dimensionen verallgemeinern und zwar gleich so, dass der Satz 1 aus §19, welcher kurz beschrieben sagt $\int_\gamma \mathrm{d}f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$, auch ein Spezialfall ist. Der Beweis wird nicht wesentlich schwieriger sein, als im obigen Spezialfall. Für die Formulierung benötigen wir jedoch einen relativ komplizierten Apparat.

11. Januar 2011

Mit dem Aufbau dieses Apparats beginnen wir nun. Dabei starten wir mit Begriffen aus der multilinearen Algebra.
Seien V, W Vektorräume (über $\mathbb{R}$).

Definition

Sei $k \geq 1$ und $f : V^k \to W$.

(a) f ist <u>k-linear</u>, wenn

$$f(v_1, \ldots, \lambda v + \mu v', \ldots, v_k) = \lambda f(v_1, \ldots, v, \ldots, v_k) + \mu f(v_1, \ldots, v', \ldots, v_k)$$
$$\text{für } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v_1, \ldots, v, v', \ldots, v_k \in V$$

(b) f ist <u>alternierend</u>, wenn

$$f(v_1, \ldots, v_k) = 0 \text{ falls } v_i = v_j \text{ für ein Paar } (i,j) \text{ mit } 1 \leq i < j \leq k$$

Sei $f : V^k \to W$ k-linear und alternierend. Wie in linearer Algebra zeigt man:
Ist π eine Permutation von $\{1, \ldots, k\}$, so ist

$$f(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}) = \mathrm{sgn}(\pi) \cdot f(v_1, \ldots, v_k)$$

Definition

Eine <u>alternierende k-Form</u> ω auf V ist eine k-lineare alternierende Abbildung $\omega : V^k \to \mathbb{R}$.

Beispiel:
Ist $\dim(V) = n$, so ist det eine alternierende n-Form auf V.

Für $k \geq 1$ setze

$$Alt^k(V) = \text{Menge aller alternierenden } k\text{-Formen auf V.}$$

Setze noch $Alt^0(V) = \mathbb{R}$. Im folgenden ist es günstig $V^0 = \{0\}$ zu setzen und $\mathbb{R}$ mit der Menge aller Abbildungen von V^0 nach $\mathbb{R}$ zu identifizieren.
$Alt^k(V)$ ist mit der offensichtlichen Operation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Es ist also $Alt^1(V) = V^*$ der Dualraum von V.
Für $\omega \in V^*$ und $v \in V$ setze $\omega \cdot v = \langle \omega, v \rangle := \omega(v)$

Definition

Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in V^*$. Dann wird die Abbildung $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k : V^k \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, v_1 \rangle & \ldots & \langle \varphi_1, v_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_k, v_1 \rangle & \ldots & \langle \varphi_k, v_k \rangle \end{pmatrix}$$

Aus den Eigenschaften von det und $\langle\ ,\ \rangle$ folgt sofort, dass $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$ eine alternierende k-Form auf V ist, d.h. $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \in Alt^k(V)$

Weiterhin gilt:
Die Abbildung $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_k \rangle \mapsto \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$ vom $(V^*)^k$ nach $Alt^k(V)$ ist k-linear und alternierend.

Satz 1

Sei $k \geq 1$. Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ eine Basis von V^*. Dann bilden die Elemente $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ eine Basis von $Alt^k(V)$. Insbesondere gilt $\dim(Alt^k(V)) = \binom{n}{k}$.

Beweis:
Sie $b_1, \ldots, b_n \in V$ eine zu $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ duale Basis, d.h.

$$\langle \varphi_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Definition ist dann für $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ und $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$

$$(\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k})(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_k) \\ 0 & \text{falls } (i_1, \ldots, i_k) \neq (j_1, \ldots, j_k) \end{cases}$$

Sei also nun $\omega \in Alt^k(V)$ und setze für $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$

$$\lambda_{i_1, \ldots, i_k} = \omega(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k})$$

Dann gilt

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1, \ldots, i_k} \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$$

und diese Darstellung ist eindeutig.

$\square$

Satz 2

Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$. Weiterhin seien $\psi_1, \dots, \psi_k \in V^*$ mit $\psi_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\varphi_j$ für $1 \leq i \leq k$.
Setze $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}}$.
Dann gilt $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k = \det A \cdot \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$.

Beweis:
Sei S_k die Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, k\}$.
Es gilt $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} a_{ij_1} \cdot \dots \cdot a_{kj_k} \varphi_{j1} \wedge \dots \wedge \varphi_{jk} = \sum_{\pi \in S_k} a_{1\pi(1)} \cdot \dots \cdot a_{k\pi(k)} \cdot \varphi_{\pi(1)} \cdot \dots \cdot \varphi_{\pi(k)} = \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdot \dots \cdot a_{k\pi(k)} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k = \det A \cdot \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$

$\square$

Sei V endlich-dimensional.

Satz 3

Seien $k, l \geq 1$. Es gibt genau eine Abbildung $(\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$ von $Alt^k(V) \times Alt^l(V)$ nach $Alt^{k+1}(V)$ mit den Eigenschaften

(1) $\wedge$ ist bilinear, d.h.
$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$
$\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$
$\lambda \cdot (\omega \wedge \eta) = \lambda\omega \wedge \eta = \omega \wedge \lambda\eta$

(2) sind $\omega_1, \dots, \omega_k, \eta_1, \dots, \eta_k \in V^*$, so gilt

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) \wedge (\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k) = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k$$

Beweis:
zur Existenz:
Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis von V^*. Seien $\omega \in Alt^k(V)$ und $\eta \in Alt^l(V)$. Nach Satz 1 kann man ω und η eindeutig darstellen in der Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1,\dots,i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$$

$$\eta = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} b_{j_1,\dots,j_k} \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_k}$$

Definiere nun

$$\omega \wedge \eta = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}} a_{i_1,\dots,i_k} b_{j_1,\dots,j_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_k}$$

Offenbar gilt (1) und (2). Die Eindeutigkeit ist klar.

$\square$

Für $a \in \mathbb{R} = Alt^0(V)$ und $\omega \in Alt^k(V)$ setze

$$a \wedge \omega = \omega \wedge a := a\omega$$

Bemerkung:

(a) Für $\omega_1 \in Alt^k(V), \omega_2 \in Alt^l(V), \omega_3 \in Alt^m(V)$ gilt

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$$

(b) Für $\omega \in Alt^k(V)$ und $\eta \in Alt^l(V)$ gilt

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$$

Beweis:

(a) folgt unmittelbar aus der Definition

(b) Es genügt dies für den Fall zu zeigen, dass $\omega = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k, \eta = \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_l$ mit $\omega_i, \eta_j \in V^*$
Dann gilt es aber, da die Permutation

$$(1, \ldots, , k+1, \ldots, k+l) \mapsto (k+1, \ldots, k+l, 1, \ldots, k)$$

das Signum $(-1)^{kl}$ hat.

□

13. Januar 2011

Seien wieder V, W endlich-dimmensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$. Weiterhin sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Für ein $\omega \in Alt^k(W)$ definiere eine Abbildung $T^*(\omega) = T^*\omega$ von V^k nach $\mathbb{R}$ durch

$$T^*\omega(v_1, \ldots, v_k) = \omega(T(v_1), \ldots, T(v_k))$$

Offenbar ist $T^*\omega$ eine alternierende k-Form auf V, die mit T auf V zurückgeholte Form. Es gilt also:

$$T^* : Alt^k(W) \to Alt^k(V)$$

Beispiele:

(1) Ist ω alternierende 0-Form, so ist $T^*\omega = \omega$

(2) Ist ω alternierende 1-Form, so ist $T^*\omega = \omega \circ T$

Satz 4

Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) $T^* : Alt^k(W) \to Alt^k(V)$ ist linear

(b) Sind ω, η alternierende Formen auf W, so gilt $T^*(\omega \wedge \eta) = T^*(\omega) \wedge T^*(\eta)$

(c) Ist $V = W$ und $\dim(V) = n$ und ω eine alternierende n-Form, so $T^*\omega = \det T \cdot \omega$

(d) Ist Z ein weiterer Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $S : W \to Z$ linear, so ist $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$

Beweis:

zu (a) ist klar

zu (b) Wegen (a) genügt es zu zeigen, dass für $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in W^*$ gilt:

$$T^*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) = T^*(\varphi_1) \wedge \dots \wedge T^*(\varphi_k)$$

Seien hierzu $v_1, \dots, v_k \in V$. Dann gilt

$$T^*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(Tv_1, \dots, Tv_k) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, Tv_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_1, Tv_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_k, Tv_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_k, Tv_k \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \langle \varphi_1 \circ T, v_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_1 \circ T, v_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_k \circ T, v_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_k \circ T, v_k \rangle \end{pmatrix} =$$

$$= (T^*(\varphi_1) \wedge \dots \wedge T^*(\varphi_k)(v_1, \dots, v_k)$$

zu (c) Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V. Sei $T(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i$ und setze $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Nach Definition ist dann $\det T = \det A$. Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ die zu $b_1, \dots, b_n$ duale Basis. Nach Satz 1 hat ω die Form $c\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$.
Sei ohne Einschränkung $c = 1$ Nach (b) ist $T^*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = T^*(\varphi_1) \wedge \dots \wedge T^*(\varphi_n)$.
Aber $T^*(\varphi_j) = \varphi_j \circ T \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \varphi_i$. Somit nach Satz

$$T^*(\varphi_1) \wedge \dots \wedge T^*(\varphi_n) = \det A^t \cdot \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n = \det T\omega$$

zu (d) ist klar nach Definition

□

Im Folgenden betrachten wir dies für $V = \mathbb{R}^n$.
Dann hat V^* die kanonische Basis $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, wobei $\lambda_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die i-te Projektion, d.h. $\lambda_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$.
Nach Satz 1 bilden die Elemente $\lambda_{i_1} \wedge \dots \wedge \lambda_{i_k}, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ eine Basis von $Alt^k(\mathbb{R}^n)$ für $k \geq 1$.

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Differentialform der Ordnung k (oder kurz k-Form) auf U ist eine Abbildung $\omega : U \to Alt^k(\mathbb{R}^n)$.
Eine 0-Form ist also einfach eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}$.
Für $k = 1$ stimmt diese Definition mit der früheren überein.

Seien $\omega, \omega_1, \omega_2$ k-Formen auf U und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Definiere dann die k-Formen $f\omega$ und $\omega_1 + \omega_2$ durch

$$(f\omega)(x) = f(x) \cdot \omega(x)$$

und

$$(\omega_1 + \omega_2)(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x)$$

Ist weiterhin η eine l-Form auf U, so kann man eine $k + l$-Form $\omega \wedge \eta$ definieren durch

$$(\omega \wedge \eta)(x) = \omega(x) \wedge \omega(x)$$

Die obigen Rechenregeln übertragen sich auf diese Operationen.
Sei nun $k \geq 1$ und ω eine k-Form auf U. Dann besitzt ω eine kanonische Darstellung, die sich wie folgt ergibt:
Da die Elemente $\lambda_{i_1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{i_k}, 1 \leq i_1, < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ eine Basis von $Alt^k(\mathbb{R}^n)$ bilden, gibt es eindeutig bestimmte Funktionen $f_{i_1,\ldots,i_k} : U \to \mathbb{R}$ mit

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k}(x) \cdot \lambda_{i_1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{i_k} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k} \cdot d\lambda_{i_1}(x) \wedge \ldots \wedge d\lambda_{i_k}(x)$$

Mit unserer früheren Konvention $dx_i := d\lambda_i$ gilt also

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Wir nennen dies die Normaldarstellung von ω.

Ist ω wie oben, so heißt ω beliebig oft differenzierbar, wenn jedes $f_{i_1,\ldots,i_k}$ beliebig oft partiell differenzierbar ist.
Im folgenden setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass jede k-Form beliebig oft differenzierbar ist, d.h. wir machen die Konvention

$$k - \text{Form} = \text{beliebig oft differenzierbare } k - \text{Form}$$

Bemerkung:
Dies ist unproblematisch, denn sind ω, η beliebig oft differenzierbar, so auch $\omega \wedge \eta$.

Für offenes $U \subseteq \mathbb{R}^n$ setze

$$\Omega^k(U) = \text{Menge aller } k - \text{Formen auf } U$$

18. Januar 2011

Wir definieren nun für jede k-Form auf U ihre (äußere Ableitung) dω. Dies geht wie folgt:

(1) Ist ω eine 0-Form, so sei $\mathrm{d}\omega$ die übliche Ableitung von ω.

(2) Sei also ω eine k-Form mit $k \geq 1$. Sei $\omega = \sum\limits_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} f_{i_1,\dots,i_k}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$ die Normaldarstellung von ω. Setze dann

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} \mathrm{d}f_{i_1,\dots,i_k}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

Somit gilt also für ω wie in (2)

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1},\dots,f_{i_k}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{i_n}$$

Es gilt also

$$\mathrm{d}: \Omega^k(U)\to\Omega^{k+1}(U)$$

Beispiel:
Sei $\omega = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$. Dann:

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x}_{\substack{=0!\\ \text{da alternierend}}} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \frac{\partial g}{\partial y}\underbrace{\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y}_{\substack{=0!\\ \text{da alternierend}}} =$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

Analog erhält man für $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\mathrm{d}x_i$, dass

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial f_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j$$

Satz 5

Sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen.

(a) Sind ω_1,ω_2 k-Formen auf U und $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, so gilt

$$\mathrm{d}(\lambda\omega_1+\mu\omega_2) = \lambda\mathrm{d}\omega_1+\mu\mathrm{d}\omega_2$$

(b) Ist ω eine k-Form auf U und η eine l-Form auf U, so gilt

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta) = \mathrm{d}\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta$$

(c) Ist ω eine k-Form auf U, so gilt

$$\mathrm{dd}\omega = 0$$

Beweis:

zu (a) ist klar

zu (b) Sei zuerst $k = l = 0$. Dann ist (b) einfach die Produktregel.
Sei nun $k, l \in \mathbb{N}$ beliebig.
Sei $\omega = \sum\limits_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} f_{i_1,\dots,i_k} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ und $\eta = \sum\limits_{1\leq j_1<\dots<j_k\leq n} g_{j_1,\dots,j_k} \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{j_k}$.

Schreibe hierfür kurz:

$$\omega = \sum_I f_I \mathrm{d}x_I \text{ und } \eta = \sum_J g_J \mathrm{d}x_J$$

Dann ist

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} f_I g_J \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J$$

Also

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \sum_{I,J} \mathrm{d}(f_I g_J) \wedge \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J = \sum_{I,J} (g_J \mathrm{d}f_I + f_I \mathrm{d}g_J) \wedge \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J =$$

$$= \sum_{I,J} (g_J \mathrm{d}f_i \wedge \mathrm{d}x_I \mathrm{d}x_J + (-1)^k f_I \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}g_j \wedge \mathrm{d}x_J = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta$$

zu (c) Wegen (a) genügt es den Fall zu betrachten, dass $\omega = f \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$. Hierfür gilt aber

$$\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) \overset{(b)}{=} \mathrm{d}\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} - \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}1 \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} =$$

$$= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

Somit genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{d}\mathrm{d}f = 0$ für eine 0-Form f.
Wegen $\mathrm{d}f = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$ ist aber nach obigem Beispiel

$$\mathrm{d}\mathrm{d}f = \sum_{1\leq i<j\leq n} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right)}_{=0(\text{ nach Analysis II})} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = 0$$

□

Wir übertragen nun das Zurückholen von k-Formen auf Differentialformen. Seien hierzu $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen sowie $\varphi : U \to V$ eine beliebig oft differenzierbare Abbildung. Für jedes $x \in U$ ist dann $D\varphi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, und wir können mit $D\varphi(x)$ jede alternierende Form auf $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$ zurückholen. Sei also ω eine k-Form auf V. Wir definieren dann eine k-Form $\varphi^*(\omega) = \varphi^*\omega$ auf U durch

$$(\varphi^*\omega)(x) = (D\varphi(x))^*\omega(\varphi(x))$$

Es gilt also für $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}1^n$

$$(\varphi^*\omega)(x)(v_1, \dots, v_k) = \omega(\varphi(x))(D\varphi(x)v_1, \dots, D\varphi(x)v_k)$$

Es ist
$$\varphi^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$$
[Nach unseren Konventionen müssen wir genau genommen noch zeigen, dass $\varphi^*\omega$ beliebig oft differenzierbar ist. Dies folgt aber leicht aus den Berechnungen weiter unten.]

Bemerkung:
Für $k = 0$, d.h. f 0-Form, ist $\varphi^* f = f \circ \varphi$

Satz 6

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen sowie $\varphi : U \to V$ beliebig oft differenzierbar.

(a) φ^* ist linear

(b) Sind ω, η Differentialformen auf V, so gilt
$$\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta)$$

(c) Ist $m = n$ und ω eine n-Form auf V, so gilt
$$\varphi^*\omega = \det D\varphi \cdot (\omega \circ \varphi)$$

(d) Ist $W \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\psi : V \to W$ beliebig oft differenzierbar, so gilt
$$\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$$

Beweis:
(a), (b) und (c) folgen sofort aus Satz 4.
(d) folgt aus Satz 4 und der Kettenregel
$$D(\psi \circ \varphi)(x) = D\psi(\varphi(x)) \cdot D\varphi(x)$$

□

20. Januar 2011

Wie berechnet sich $\varphi^*\omega$ aus der Normaldarstellung von ω?
Sei also $\omega = \sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} f_{i_1,\dots,i_k} \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y_{i_k}$ eine k-Form auf V. Für $1 \le i \le m$ ist nach Definition:
$$(\varphi^* \mathrm{d}y_i)(x)(v) = \mathrm{d}y_i(\varphi(x))(D\varphi(x)v) = \mathrm{d}\varphi_i(x)(v)$$
wobei $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$
Also $\varphi^*\mathrm{d}y_i = \mathrm{d}\varphi_i$. Weiterhin ist für eine 0-Form f auf W $\varphi^* f = f \circ \varphi$. Somit gilt für ω wie oben nach Satz 6
$$\varphi^*\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} (f_{i_1,\dots,i_k} \circ \varphi) \mathrm{d}\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$$
Hieraus sieht man sofort, dass $\varphi^*\omega$ unendlich oft differenzierbar ist.
Speziell gilt für $k = 1 = n$
$$\varphi^*\omega = \sum_{i=1}^{m} (f_i \circ \varphi) \cdot \varphi_i'$$
d.h. $\varphi^*\omega(t) = \omega(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.
In diesem Fall ist also $\varphi^*\omega$ schon in der Definition des Kurvenintegrals aufgetaucht.

Sehr wichtig ist die folgende Vertauschbarkeit der Ableitung mit dem Zurückholen von Differentialformen.

Satz 7

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen sowie $\varphi : U \to V$ beliebig oft differenzierbar. Dann gilt für jede Differenzialform ω auf V

$$\varphi^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\varphi^*\omega)$$

Beweis:
Wegen Linearität können wir o. E. annehmen, dass $\omega = f\mathrm{d}y_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_{i_k}$.
Sei wieder $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$. Wie oben gezeigt ist $\varphi^*\mathrm{d}y_i = \mathrm{d}\varphi_i$. Weiterhin ist

$$\varphi^*(\mathrm{d}f) = \varphi^*\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \circ \varphi\right) \cdot \mathrm{d}\varphi_i = \mathrm{d}(f \circ \varphi)$$

Also

$$\mathrm{d}(\varphi^*\omega) = \mathrm{d}((f \circ \varphi)\mathrm{d}\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_k}) \overset{\text{Satz 5 (b)(c)}}{=} \mathrm{d}(f \circ \varphi) \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_k}$$

Und

$$\varphi^*(\mathrm{d}\omega) = \varphi^*(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_{i_k}) = \mathrm{d}(f \circ \varphi) \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_k}$$

□

Wir verallgemeinern den Begriff der Kurve.

Definition

Eine k-Fläche im $\mathbb{R}^n$ ist ein Paar (γ, Q) mit $\gamma : U \to V$ unendlich oft differenzierbar, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $Q \subseteq U$ ist ein kompakter nichtentarteter Quader. Wir schreiben dies etwas ungenau als $\gamma : Q \to V$ ist k-Fläche.

Beispiel:
Sei $Q = [0, 1] \times [0, 2\varphi]$
$\gamma : Q \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$ ist eine 2-Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Wir wollen nun k-Formen im $\mathbb{R}^n$ über $k-$Flächen im $\mathbb{R}^n$ integrieren.

Hierzu gehen wir wie folgt vor:
Sei zuerst ω eine k-Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^k$, und sei $Q \subseteq U$ ein kompakter nichtentarteter Quader. Dann ist $\omega = f\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$ mit $f : U \to \mathbb{R}$. Setze $\int\limits_Q \omega := \int\limits_Q f\mathrm{d}x$.
Sei nun ω eine k-Form auf $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\gamma : Q \to V$ eine k-Fläche. Setze dann

$$\int\limits_Q \omega := \int\limits_Q \gamma^*\omega$$

Dies ist eine Verallgemeinerung des Kurvenintegrals, denn sei $\gamma : [a, b] \to V$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen eine Kurve. Weiterhin sei ω eine 1-Form auf V. Sei also etwa $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \mathrm{d}x_i$. Nach oben gilt dann

$$\gamma^* \omega = \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ \gamma) \cdot \gamma_i'$$

Also ist nach unserer neuen Definition

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{a}^{b} \sum_{i=1}^{n} f_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) \, \mathrm{d}t$$

was mit unserer alten Definition übereinstimmt.

Ein weiterer Spezialfall ist der Folgende.
Sei $\gamma : Q \to V$ eine k-Fläche mit $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen. Weiterhin sei ω eine k-Form auf V. Nach Satz 6 (c) ist

$$\gamma^* \omega = \det D\gamma \cdot (\omega \circ \gamma)$$

Sei $\omega = f \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$. Nach Definition ist dann

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{Q} f(\gamma(x)) \cdot \det(D\gamma(x)) \mathrm{d}x$$

Sei nun sogar $\gamma : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Setze nun $U_1 = \mathrm{Int}(Q)$ und $V_1 = \gamma[U_1]$. Dann ist auch $\gamma \upharpoonright U_1 : U_1 \to V_1$ ein Diffeomorphismus. Also nach Transformationssatz

$$\int\limits_{U_1} f(\gamma(x)) \cdot |\det D\gamma(x)| \mathrm{d}x = \int\limits_{V_1} f(y) \mathrm{d}y$$

Nun seien aber ∂Q und $\partial[Q]$ Nullmengen und $V_1 = \mathrm{Int}\gamma[Q]$. Also erhält man auch

$$\int\limits_{Q} f(\gamma(x)) \cdot |\det D\gamma(x)| \mathrm{d}x = \int\limits_{\gamma[Q]} f(y) \mathrm{d}y$$

Wegen Stetigkeit ist aber $\det D\gamma(x) > 0$ für alle $x \in Q$ oder $\det D\gamma(x) < 0$ für alle $x \in Q$. Also gilt

$$\int\limits_{\gamma} \omega \int\limits_{\gamma[Q]} f(y) \mathrm{d}y \text{ oder } \int\limits_{\gamma} \omega = - \int\limits_{\gamma[Q]} f(y) \mathrm{d}y$$

(orientiertes Integral)

Schließlich können wir den Formalismus auch noch sinnvoll auf den Fall $k = 0$ erweitern. Setze $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Eine 0-Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $\gamma : \mathbb{R}^0 \to V$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für eine 0-Form f auf V und eine 0-Kurve $\gamma : \mathbb{R}^0 \to V$ setze

$$\int\limits_{\gamma} f = f(\gamma(0))$$

25. Januar 2011

Sei nun $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Setze

$$F_k(V) = \text{ Menge aller } k - \text{Fälchen } \gamma : Q \to \ V$$

Die k-Kettengruppe $C_k(V)$ wird definiert durch

$$C_k(V) = \{C : F_k(V) \to \mathbb{Z} \mid C(\gamma) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } \gamma\}$$

Wir scheiben ein $C \in C_k(V)$ auch als

$$C = \sum_\gamma C(\gamma) \cdot \gamma$$

Für eine k-Form ω auf V und $C \in C_k(V)$ definieren wir das Integeral durch lineare Fortsetzung:

$$\int_C \omega = \sum_\gamma C(\gamma) \cdot \int_\gamma \omega$$

Im Folgenden benutzen wir die Notation

$$I_1 \times \cdots \times \hat{I}_i \times \cdots \times I_n := I_1 \times \cdots \times I_{i-1} \times I_{i+1} \times \cdots \times I_n$$

Wir benutzen diese $\hat{}$-Notation auch für andere Objekte.

Sei nun $\gamma : Q \to V$ eine k-Fläche mit $k \geq 1$. Wir definieren auf natürliche Weise den orientierten Rand $\partial\gamma \in C_{k-1}(V)$: Sei $Q = I_1 \times \cdots \times I_k$ wobei $I_i = [a_i, b_i]$. Für $1 \leq i \leq k$ sei $Q_i = I_1 \times \cdots \times \hat{I}_i \times \cdots \times I_k \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$ und definiere $\gamma_i^j : Q_i \to V, j = 0, 1$ durch

$$\gamma_i^0(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k) = \gamma(x_1, \dots, a_i, \dots, x_k)$$

$$\gamma_i^1(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k) = \gamma(x_1, \dots, b_i, \dots, x_k)$$

Dann sind γ_i^0, γ_i^1 $(k-1)$-Flächen in V. Setze

$$\partial\gamma = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1}(\gamma_i^1 - \gamma_i^0)$$

Wir haben nun endlich alle Vorbereitungen getroffen, um den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 8 (Stokes)

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 1$, und ω eine $(k-1)$-Form auf V. Weiterhin sei $\gamma : Q \to V$ eine k-Fläche. Dann gilt

$$\int_\gamma \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\gamma} \omega$$

Beweis:

Für $k = 1$ folgt die Behauptung aus Satz 1 aus §19.
Sei also im Folgenden $k \geq 2$. Weiterhin sei $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$ und setze

$$Q := [a_1, b_1] \times \cdots \times \widehat{[a_i, b_i]} \times \cdots \times [a_k, b_k]$$

1.Fall

$\gamma = \iota$, wobei $\iota(x) = x$ für alle $x \in U$. Insbesondere also $k = n$.
In Normaldarstellung hat ω die Form

$$\omega = \sum_{i=1}^k f_i \mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_n$$

Wegen Linearität genügt es also, die Behauptung für $\omega = f\mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_n$ zu zeigen.

Nun ist
$d\omega = df \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n =$
$= \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n = (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

Wegen $\gamma^* d\omega = \iota^* d\omega = d\omega$ folgt also mit Fubini und Hauptsatz der Differential- und Integralrechung

$$\int\limits_{\gamma} d\omega = (-1)^{i-1} \int\limits_{Q} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n = (-1)^{i-1} \int\limits_{Q_i} \int\limits_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n =$$
$$= (-1)^{i-1} \int\limits_{Q_i} (f(x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_k) - f(x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_k)) dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k$$

Wir berechnen nun $\int\limits_{\partial\gamma} \omega$. Es ist

$$\int\limits_{\partial\gamma} \omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int\limits_{\gamma_j^1} \omega - \int\limits_{\gamma_j^0} \right) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int\limits_{Q_j} (\gamma_j^1)^* \omega - \int\limits_{Q_j} (\gamma_j^0)^* \omega \right)$$

Sei nun für $1 \leq j \leq k$, $m \leq 1$: $\gamma_j^m = (\gamma_{j,1}^m, \ldots, \gamma_{j,k}^m)$ die Komponentenzerlegung.
Dann ist $(\gamma_j^m)^* \omega = (f \circ \gamma_j^m) d\gamma_{j,1}^m \wedge \ldots \wedge \widehat{d\gamma_{j,i}^m} \wedge \ldots \wedge d\gamma_{j,k}^m$. Nun ist aber $\gamma = \iota$, d.h.

$$\gamma_{j,l}^m (x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_k) = x_j \text{ für } l \neq j$$

und

$$\gamma_{j,j}^m \text{ ist konstant } \begin{cases} = a_j & \text{für } m = 0 \\ = b_j & \text{für } m = 1 \end{cases}$$

Somit ist $d\gamma_{j,j}^m = 0$ also $(\gamma_j^m)^* \omega = 0$ für $j \neq i$. Weiterhin ist $d\gamma_{i,l}^m = dx_l$ für $l \neq i$, also

$$\int\limits_{\partial\gamma} \omega = (-1)^{i-1} \left(\int\limits_{Q_i} (\gamma_i^1)^* \omega - \int\limits_{Q_i} (\gamma_i^0)^* \omega \right) = (-1)^{i-1} (f \circ \gamma_i^1 - f \circ \gamma_i^0) dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k =$$
$$= (-1)^{i-1} \int\limits_{Q_i} (f(x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_k) - f(x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_k)) dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k$$

Damit ist der erste Fall bewiesen.

<u>2. Fall</u>
Sei nun γ beliebig. Wie oben sei $\iota : U \to U$ die Identität. Dann gilt:

$$\int\limits_{\gamma} d\omega = \int\limits_{\gamma \circ \iota} d\omega = \int\limits_{\iota} \gamma^*(d\omega) \overset{\text{Satz 7}}{=} \int\limits_{\iota} d(\gamma^* \omega) \overset{\text{1. Fall}}{=} \int\limits_{\partial\iota} \gamma^* \omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int\limits_{\iota_j^1} \gamma^* \omega - \int\limits_{\iota_j^0} \gamma^* \omega \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int\limits_{\gamma \circ \iota_j^1} \omega - \int\limits_{\gamma \circ \iota_j^0} \omega \right) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int\limits_{\gamma_j^1} \omega - \int\limits_{\gamma_j^0} \right) = \int\limits_{\partial\gamma} \omega$$

□

§21 Die L^P-Räume, Fouriereihen

Definition

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
f ist messbar, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die fast überall punktweise gegen f konvergiert.

Es gilt also insbesondere:
Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist f messbar.

Aber Messbarkeit von Funktionen ist eine lokale Eigenschaft, denn es gilt:

Satz 1

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann ist f messbar genau dann, wenn für alle Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ f_Q messbar ist.

Beweis:
Die Richtung von links nach rechts ist trivial.
Sei also die rechte Seite erfüllt. Wähle dann eine Folge $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Quadern mit $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} Q_i$. Wähle für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine Folge $(s_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen und eine Nullmenge A mit $\lim\limits_{k\to\infty} s_{ik}(x) = f_{Q_i}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus A_i$.
Wir können o. E. annehmen, dass $s_{ik}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q_i$.
Setze nun $A = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Dann ist A eine Nullmenge.
Für $k \in \mathbb{N}$ setze $s_k = \sum\limits_{i=0}^{k} s_{ik}$. Dann ist s_k eine Treppenfunktion, und es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} s_k(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Also ist f messbar.

$\square$

Also ist auch jede lokal-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar. Die Menge der messbaren Funktionen hat sehr gute Abgeschlossenheitseigenschaften. So gilt:

Satz 2

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt:

(a) $f + g$ und $f \cdot g$ sind messbar

(b) Ist $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ eine Nullmenge, so ist $\dfrac{1}{f}$ messbar

(c) Ist I ein Intervall und $h : I \to \mathbb{R}$ stetig sowie $f[\mathbb{R}^n] \subseteq I$, so ist $h \circ f$ messbar.

Beweis:
(a), (b) sind klar.

zu (c):
Sei etwa $I = [a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Wähle eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die fast überall gegen f konvergiert. Wähle ein $b' \in (a, b)$ und definiere $\widetilde{f}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\widetilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{falls } f_k(x) \in I \\ a & \text{falls } f_k(x) < a \\ b' & \text{falls } f_k(x) \geq b \end{cases}$$

Dann ist $\left(\widetilde{f}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ auch eine Folge von Treppenfunktionen, die fast überall punktweise gegen f konvergiert, und es gilt natürlich, dass $\widetilde{f}_k[\mathbb{R}^n] \subseteq I$.
Setze nun $\widetilde{h}_k = h \circ \widetilde{f}_k$. Wegen der Stetigkeit von h konvergiert $\left(\widetilde{h}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen $h \circ f$. Setze schließlich $Q_k = [-k, k]^n$ und $h_k = \widetilde{h}_k \cdot 1_{Q_k}$. Dann ist $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen $h \circ f$ konvergiert.

□

Satz 3

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent

(1) f ist integrierbar

(2) f ist messbar und es existiert integrierbares $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $|f| \leq g$

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2) ist trivial. Wähle einfach $g = |f|$.

(2) $\Rightarrow$ (1)
Sei $(\widetilde{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Wähle integrierbares g mit $f \leq g$ und setze $f_k = \min(\widetilde{f}_k, g)$. Dann ist f_k zwar keine Treppenfunktion mehr, aber f_k ist integrierbar, $|f_k| \leq g$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall punktweise gegen f. Also ist nach Lebesgue f integrierbar.
Ist f beliebig, so erhält man, dass f^+, f^- integrierbar sind und daher auch $f = f^+ - f^-$

□

Korollar

Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar.
Dann ist $f \cdot g$ integrierbar.

Beweis:
Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $|f| \leq c$. fg ist messbar, und es gilt $|fg| \leq c|g|$ und $c|g|$ ist integrierbar.

□

Satz 4

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen, die fast überall punktweise gegen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f messbar.

Beweis:
Sei zuerst $|f_k|\leq 1$ für alle $k\in\mathbb{N}$. Nach Satz 1 genügt es zu zeigen, dass $f\cdot 1_Q$ für jeden Quader $Q\in\mathbb{R}^n$ messbar ist. Sei also $Q\subseteq\mathbb{R}^n$ ein Quader. Nach dem obigen Korollar ist dann $f_k 1_Q$ für jedes $k\in\mathbb{N}$ integrierbar. Außerdem gilt $|f_k 1_Q|\leq 1_Q$. Aber $(f_k\cdot 1_Q)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise fast überall gegen $f\cdot 1_Q$. Also ist nach Lebesgue $f\cdot 1_Q$ sogar integrierbar.
Sei nun f_k beliebig. Sei $h:\mathbb{R}\to[-1,1]$ eine injektive stetige Funktion. Dann ist nach Satz 2 $(h\circ f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen, die fast überall punktweise gegen $h\circ f$ konvergiert. Wegen $|h\circ f_k|\leq 1$ ist also nach oben $h\circ f$ messbar.
Somit ist also nach Satz 2 $f=h^{-1}\circ(h\circ f)$ messbar.

□

Schließlich noch zwei Konventionen:

Sei $f:A\to\mathbb{R}^n$, wobei $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Wir sagen, dass f messbar ist, wenn f_A messbar ist. Außerdem setzen wir

$$||f||_1=||f_A||_1$$

01. Februar 2011

Definition

Sei $A\subseteq\mathbb{R}^n$ messbar und $p\in\mathbb{R}$ mit $p\geq 1$.
Sei dann $\mathcal{L}^P(A)$ die Menge aller messbaren $f:A\to\mathbb{R}$, für die $|f|^p$ integrierbar ist.
(Es ist also nach Satz 3 $\mathcal{L}^1(A)$ die Menge aller integrierbaren $f:A\to\mathbb{R}$)
Für $f\in\mathcal{L}^p(A)$ setze

$$||f||_p=\left(\int\limits_A |f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\mathcal{L}^p(A)$ ist ein Vektrorraum über $\mathbb{R}$. Denn offenbar ist $\mathcal{L}^p(A)$ abgeschlossen unter Skalarmultiplikation. Weiterhin seien $f,g\in\mathcal{L}^p(A)$. Nun sind $f+g$ und $|f+g|^p$ messbar. Weiterhin ist $|f+g|^p\leq(2\max(|f|,|g|))^p=2^p\cdot\max(|f|^p,|g|^p)$. Also ist nach Satz 3 $|f+g|^p$ integrierbar und daher insgesamt $f+g\in\mathcal{L}^p(A)$.

Wir wollen zeigen, dass $||\ ||_p$ eine Halbnorm ist. Offenbar ist für $c\in\mathbb{R}$ und $f\in\mathcal{L}^p(A)$

$$||cf||_p=\left(\int\limits_A |cf|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(|c|^p\cdot\int\limits_A |f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=|c|\cdot||f||_p$$

Für die Dreiecksungleichung brauchen wir noch zwei Vorbereitungen.

Lemma 5

Seien $a, b > 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Beweis:
Es ist zu zeigen (durch einfache Substitution), dass für $t \geq 1$

$$t^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

gilt. Nun ist dies richtig für $t = 1$.
Differenziert man beide Seiten nach t, so gilt die Ungleichung für $t \geq 1$, denn

$$\frac{1}{p} \cdot t^{\frac{1}{p}-1} \leq \frac{1}{p}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

□

Satz 6 (Höldersche Ungleichung)

Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Weiterhin seien $f \in \mathcal{L}^p(A)$ und $g \in \mathcal{L}^q(A)$. Dann ist fg integrierbar und es gilt:

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$$

Beweis:
Seien o.E. $||f||_p$ und $||g||_q$ ungleich 0.
Für $x \in A$ gilt nach Lemma 5

$$(*) \qquad \frac{|f(x)| \cdot |g(x)|}{||f||_p \cdot ||g||_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{|f(x)|}{||f||_p}\right)^p + \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{|g(x)|}{||g||_q}\right)^q$$

Da die rechte Seite integrierbar ist und fg messbar ist, ist nach Satz 3 fg integrierbar.
Weiterhin ergibt sich aus $(*)$ durch Integration

$$\frac{||fg||_1}{||f||_p \cdot ||g||_q} \leq \frac{1}{p \cdot ||f||_p^p} \cdot \int_A |f|^p \mathrm{d}x + \frac{1}{q \cdot ||g||_q^q} \cdot \int_A |g|^q \mathrm{d}x = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

Satz 7 (Minkowskische Ungleichung)

Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(A)$. Dann gilt $||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$.

Beweis:
Für $p = 1$ ist dies klar.
Sei also $p > 1$ und setze $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Es ist dann $p - 1 = \frac{p}{q}$. Also gilt für $h \in \mathcal{L}^p(A) \quad |h|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(A)$.
Wir erhalten nun

$$|f+g|^p = |f+g|\ |f+g|^{p-1} \leq |f|\ |f+g|^{p-1} + |g|\ |f+g|^{p-1}$$

und es sind $|f|, |g| \in \mathcal{L}^p(A)$, $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(A)$.
Somit ist nach Satz 6

$$\int_A |f+g|^p \mathrm{d}x \leq ||f||_p \cdot \left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_q + ||g||_p \cdot \left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_q =$$

$$= (||f||_p + ||g||_p) \cdot \left(\int_A |f+g|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

Ist $|f+g| = 0$ fast überall, so ist die Behauptung trivial. Andernfalls folgt nach Division durch $\left(\int_A |f+g|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$ die Behauptung.

□

$||\ ||_p$ auf $\mathcal{L}^p(A)$ ist aber nur eine Halbnorm, denn es gilt:

$$||f||_p = 0 \text{ genau dann, wenn } f = 0 \text{ fast überall}$$

Wir lösen dieses Dilemma, indem wir faktorisieren. Sei hierzu

$$\mathcal{N}(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f = 0 \text{ fast überall}\}$$

Sein nun

$$\mathrm{L}^p(A) = \frac{\mathcal{L}^p(A)}{\mathcal{N}(A)}$$

der Quotientenvektorraum nach diesem Untervektorraum. Die Elemente von $\mathrm{L}^p(A)$ sind also die Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim_p$ definiert durch

$$f \sim_p g \text{ genau dann, wenn } f - g \in \mathcal{N}(A) \text{ für } f, g \in \mathcal{L}^p(A)$$

Setze $[f] = \{g \mid f \sim_p g\}$
Wir können dann $||\ ||_p$ auf $\mathrm{L}^p(A)$ definieren durch

$$||[f]||_p = ||f||_p$$

Dis ist wohldefiniert und liefert eine Norm auf $\mathrm{L}^p(A)$.
Wir unterscheiden nicht wirklich zwischen $\mathcal{L}^p(A)$ und $\mathrm{L}^p(A)$ und schreiben $f \in \mathrm{L}^p(A)$ für $f : A \to \mathbb{R}$ statt $[f] \in \mathrm{L}^p(A)$.

Wir wollen zeigen, dass $\mathrm{L}^p(A)$ ein Banachraum ist. Hierzu benötigen wir noch:

Satz 8 (Fatou)

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die fast überall punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Es sei $f_k > 0$ für alle k und die Folge $(\int f_k \mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}}$ sei beschränkt.
Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f \mathrm{d}x \leq \liminf \int f_k \mathrm{d}x$$

(= kleinster Häufungspunkt von $(\int f_k \mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}}$

Beweis:
Für $k,j \in \mathbb{N}$ setze $g_{k,j} = \min(f_k, f_{k+1}, f_{k+j}$ und definiere $g_k : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$g_k(x) = \inf\{f_i(x) \mid i \geq k\}$$

Nach Levi ist g_k integrierbar, da $(g_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$ punktweise monoton fallend gegen g_k konvergiert. Sei c eine obere Schranke für $\left(\int f_k \mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Die Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall punktweise monoton wachsend gegen f. Also ist nach Levi f integrierbar und es gilt

$$\int f \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int g_k \mathrm{d}x \leq c$$

Da dies für jedes solche c gilt, folgt die Behauptung.

□

03. Februar 2011

Satz 9 (Riesz-Fischer)

$L^p(A)$ ist ein Banachraum

Beweis:
Für $p = 1$ haben wir das schon gezeigt.
Sei also $p > 1$ und schreibe L^p für $L^p(A)$. Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in L^p. Wir suchen $f \in L^p$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} ||f_k - f||_p = 0$.
Hierzu konstruieren wir zuerst einen Kandidaten f. Sei hierzu $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$ mit

$$(*) \qquad ||f_k - f_{k_i}||_p \leq \frac{1}{2^{i+1}} \text{ für alle } k \geq k_i$$

Wir wollen zeigen, dass $(f_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ fast überall punktweise konvergiert.
Schreibe hierzu $f_{k_i} = f_{k_0} \sum\limits_{j=0}^{i-1}(f_{k_{j+1}} - f_{k_j})$. Setze nun $g_j = f_{k_{j+1}} - f_{k_j}$. Es genügt zu zeigen, dass $\sum\limits_{j=0}^{\infty} g_j$ fast überall konvergent ist, es genügt sogar, dies auf jedem Quader $Q \in \mathbb{R}^n$ zu

zeigen. Setze hierzu $q = \frac{p}{p-1}$. Da $1_Q \in \mathcal{L}^q$ ist, gilt nach Satz 6, dass $g_j\ 1_Q$ integrierbar ist und

$$\int \left(\sum_{j=0}^{i} g_j 1_Q \right) \leq \sum_{j=0}^{i} ||g_j||_p \cdot ||1_Q||_q \underset{(*)}{\leq} ||1_Q||_q$$

Nach Levi ist also $\sum_{j=0}^{\infty} g_j$ fast überall absolut konvergent. Somit konvergiert auch $(f_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$. Wir zeigen nun, dass $f \in L^p$. Da alle f_{k_i} messbar sind, ist nach Satz 4 auch f messbar. Weiterhin konvergiert die Folge $(|f_{k_i}|^p)_{i\in\mathbb{N}}$ fast überall punktweise gegen $|f|^p$. Wir wollen Fatou anwenden. Nun ist $(||f_{k_i}||_p)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und daher beschränkt. Nach Fatou ist also $|f|^p$ integrierbar und somit insgesamt $f \in L^p$. Schließlich zeigen wir noch, dass $(f_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ bezüglich $||\ ||_p$ gegen f konveriert. Sei dazu $i \in \mathbb{N}$. Betrachte die Folge $\left(\left|f_{k_j} - f_{k_i}\right|^p\right)_{j\geq i}$. Es gilt für $j \geq i$

$$\left|f_{k_j} - f_{k_i}\right|^p \geq 0, \qquad \int \left|f_{k_j} - f_{k_i}\right|^p \mathrm{d}x = \left|\left|f_{k_j} - f_{k_i}\right|\right|_p^p \underset{(*)}{\leq} \frac{1}{2^{(i+1)\cdot p}}$$

und $(\left|f_{k_j} - f_{k_i}^p\right|_{j\geq i}$ konvergiert fast überall punktweise gegen $|f - f_{k_i}|^p$. Nach Fatou folgt also

$$\int |f - f_{k_i}|^p \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2^{(i+1)\cdot p}}$$

Somit konvergiert also $(f_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ bezüglich $||\ ||_p$ gegen f. Da aber $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezüglich $||\ ||_p$ eine Cauchyfolge ist, gilt dies auch für diese Folge.

□

Korollar

Falls $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezüglich $||\ ||_p$ gegen f konvergiert, so existiert eine Teilfolge von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die fast überall punktweise gegen f konvergiert.

Satz 10

Sei $p \geq 1, L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$.

(a) Die Treppenfunktionen sind dicht in L^p.

(b) Die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger sind dicht in L^p

Beweis:

zu (a) Sei $f \in L^p$ und $\varepsilon > 0$. Wir suchen eine Treppenfunktion h mit $||f - h||_p < \varepsilon$. Sei hierzu zuerst f beschränkt mit kompaktem Träger. Da f messbar ist, gibt eine Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Sei etwa $|f| \leq c$ und Q ein kompakter Quader derart, dass $\mathrm{Tr}(f) \subseteq Q$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $|h_k| \leq c$ und $\mathrm{Tr}(h_k) \subseteq Q$ gilt.
Dann gilt $|h_k - f|^p \leq (|h_k| + |f|)^p \leq (2c)^p \cdot 1_Q \in \mathcal{L}^1$ und $(|h_k - f|^p)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall punktweise gegen 0.
Nach dem Satz von Lebesgue konvergiert also $||h_k - f||_p^p$ gegen 0, was das Gewünschte in diesem Fall liefert.

Sei nun $f \in L^p$ beliebig. Für $k \in \mathbb{N}$ setze $Q_k = [-k, k]^n$ und

$$f_k = \min(\max(f, -k), k) \cdot 1_{Q_k}$$

Dann ist f_k messbar und beschränkt mit kompaktem Träger, also $f_k \in \mathcal{L}^p$. Weiterhin $|f - f_k|^p \leq |f|^p \in \mathcal{L}^1$ und $(|f - f_k|^p)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen 0. Nach Lebesgue konvergiert also auch $||f - f_k||_p^p$ gegen 0. Indem man den ersten Teil auf f_k anwendet, folgt die Behauptung.

zu (b) Wegen (a) genügt es zu zeigen:
Für jede Treppenfunktion h und alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine stetige Funktion g mit kompaktem Träger, so dass $||h - g||_p < \varepsilon$.
Wegen Dreiecksungleichung genügt es dies für den Fall zu zeigen, dass $h = 1_Q$ für einen Quader Q. Dabei können wir annehmen, dass $Int(Q) \neq \emptyset$, da sonst $v(Q) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle einen offenen Quader R mit $\overline{Q} \subseteq R$ und $v(R) < v(Q) + \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Man sieht leicht, dass es eine stetige Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, mit

$$g \restriction Q = 1, \quad g \restriction \mathbb{R}^n \setminus R = 0, \quad 0 \leq g - 1_Q \leq 1$$

Dann gilt $0 \leq g - 1_Q \leq 1_R - 1_Q$ und $|g - q_Q|^p \leq g - 1_Q$ denn

$$||g - 1_Q||_p^p \leq \int (1_R - 1_Q)\mathrm{d}x < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

□

Von besonderem Interesse sind die Räume $L^2(A)$. In diesem Fall ist die Norm $|| \; ||_2$ durch ein Skalarprodukt definiert. Wir können nämlich für $f, g \in L^2(A)$ setzen:

$$\langle f, g \rangle = \int_A fg\mathrm{d}x$$

Nach Satz 6 ist fg integrierbar. Offenbar ist dann $\langle \; , \; \rangle$ ein Skalarprodukt, und es gilt

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

$L^2(A)$ ist also ein <u>Hilbertraum</u>, d.h. ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt, für den der zugehörige normierte Raum vollständig ist. Man kann alles auf komplexwertige Funktionen erweitern. Dabei definierten wir:
Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : A \to \mathbb{C}$, so ist f messbar (integrierbar) genau dann, wenn Re f und Im f messbar (integrierbar) sind.
Ist soch ein f integrierbar, so setzen wir

$$\int_A f\mathrm{d}x = \int_A \text{Re } f\mathrm{d}x + \int_A \text{Im } f\mathrm{d}x$$

08. Februar 2011

Für $p \geq 1, A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, sei dann $\mathcal{L}^p(A, \mathbb{C})$ die Menge aller messbaren $f : A \to \mathbb{C}$ für die $|f|^p$ integrierbar ist. Für $f \in \mathcal{L}^p(A, \mathbb{C})$ setze

$$||f||_p = \left(\int_A |f|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

$L^p(A,\mathbb{C})$ ist dann die Faktorisierung von $\mathcal{L}^p(A,\mathbb{C})$ nach $\{f : A \to \mathbb{C} \mid f = 0 \text{ fast überall}\}$. Auf $L^2(A,\mathbb{C})$ haben wir ein Skalarprodukt definiert durch

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_A f\overline{g}\mathrm{d}x$$

wofür gilt

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

$L^2(A,\mathbb{C})$ ist also ein (komplexer) Hilbertraum.

Wir untersuchen neu Hilberträume. Sei also V mit dem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ ein reeller oder komplexer Hilbertraum. Die Norm $||\ ||$ sei definiert durch $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Definition

Eine Familie $(e_j)_{j\in J}$ aus V ist ein Orthonormalsystem (ONS), wenn für alle $k, j \in J$ gilt

$$\langle e_j, e_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$$

Beispiele:

(1) Sei $I = [0, 2\pi]$ und $V = L^2(I,\mathbb{C})$ mit dem etwas modifizierten Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0 2\pi f\overline{g}\mathrm{d}x$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ definiere $f_k : I \to \mathbb{C}$ durch $f_k(t) = e^{ikt}$ Dann ist $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein ONS. Dann ist es $\langle f_k, f_e\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-l)t}\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ 1 & \text{für } k = l \end{cases}$ Denn es ist $\langle f_k, f_l\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-l)t}\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ 1 & \text{für } k = l \end{cases}$

(2) Sei $I = [0, 2\pi]$ und $V = L^2(I)$ mit dem etwas modifizierten Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} fg\mathrm{d}x$$

Dann ist $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \dots)$ ein ONS.

Dies rechnet man leicht nach, indem man z.B. benutzt, dass $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ und $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

Das folgende Lemma ist ein Ergebnis aus der linearen Algebra.

Lemma 11

Seien $e_0, \ldots, e_m$ orthonormale Vektoren in V und sei W der von $e_0, \ldots, e_m$ aufgespannte Untervektorraum. Für $f \in V$ setze $P_W(f) = \sum\limits_{j=0}^{m} \langle f, e_j \rangle e_j$. Dann gilt für alle $f \in V$

(a) $f - P_W(f) \perp W$ (d.h. $\langle f - P_W(f), g \rangle = 0$ für alle $g \in W$)

(b) $||f - P_W(f)|| = \min\{||f - g||\} \mid g \in W\}$ und $P_W(f)$ ist der einzige Punkt in W, in dem dieses Minimum aufgenommen wird.

Beweis:

zu (a) $\langle f - \sum\limits_{j=0}^{m} \langle f, e_j \rangle e_j, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle - \langle f, e_k \rangle \langle e_k, e_k \rangle = 0$ für $0 \leq k \leq n$

zu (b) Für $g \in W$ gilt $f - g = (f - P_W(f)) + \underbrace{(P_W(f) - g)}_{\in W}$. Also gilt nach (a)

$$||f - g||^2 = ||f - P_W(f)||^2 + ||P_W(f) - g||^2$$

Hieraus folgt die Behauptung.

□

Konvention

Eine Reihe $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f_k$ ist die Folge $\left(\sum\limits_{k=-m}^{m} f_k \right)_{m \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen. Ist $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f_k$ konvergent, so bezeichenn wir mit $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f_k$ auch den Grenzwert.

Sei nun $(e_j)_{j \in J}$ ein ONS in V, wobei $J = \mathbb{N}$ oder $J = \mathbb{Z}$. Sei $f \in V$.
Wir untersuchen die Frage, ob es eine Reihe $\sum\limits_{j \in J} a_j e_j$ (a_j Skalare) gilt mit $f = \sum\limits_{j \in J} a_j e_j$. Da das Skalarprodukt wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung stetig ist, gibt es nur einen Kandidaten für solch eine Reihe, der ist $f = \sum\limits_{j \in J} a_j e_j$, so gilt für $k \in J$

$$\langle f, e_k \rangle = \left\langle \sum_{j \in J} a_j e_j, e_k \right\rangle = \sum_{j \in J} a_j \langle e_j, e_k \rangle = a_k \langle e_k, e_k \rangle = a_k$$

Dies motiviert die folgende Definition.
Für $f \in V$ sei die Fourierreiche von f bezüglich $(e_j)_{j \in J}$ definiert durch

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle e_j$$

Die $\langle f, e_j \rangle$ heißen die Fourierkoeffizienten von f. Mit $\mathcal{F}_m(f)$ bezeichnen wir die m-te Partialsumme von $\mathcal{F}(f)$.

Satz 12

Sei $(e_j)_{j\in J}$ ein ONS im Hilbertraum V. Für $f \in V$ gilt dann

(a) $\sum_{j\in J} |\langle f, e_j\rangle|^2 \leq ||f||^2$ (Besselsche Ungleichung)

(b) Die Fourierreihe $\mathcal{F}(f)$ ist konvergent.

(c) Die Parsevalsche Gleichung $\sum_{j\in J} |\langle f, e_j\rangle|^2 = ||f||^2$ gilt genau dann, wenn $\mathcal{F}(f) = f$, d.h. wenn die Fourierreihe von f gegen f konvergiert.

Beweis:

zu (a) Für $m \in \mathbb{N}$ sei W_m der von $\{e_j \mid j \in J, |j| \leq m\}$ aufgespannte Untervektorraum. Dann ist mit der Notation von Lemma 11 $P_{W_m}(f) = \mathcal{F}_m(f)$ und nach Lemma 11

$$||f||^2 = ||\mathcal{F}_m(f)||^2 + ||f - \mathcal{F}_m(f)||^2 \geq ||\mathcal{F}_m(f)||^2$$

woraus (a) folgt.

zu (b) Nach (a) konvergiert $\sum_{j\in J} |\langle f, e_j\rangle|^2$. Somit existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein m_0 mit

$$||\mathcal{F}_l(f) - \mathcal{F}_m(f)||^2 \leq \varepsilon \quad \forall l, m \geq m_0$$

Somit erfüllt $\mathcal{F}(f)$ die Cauchybedingung und ist daher wegen Vollständigkeit von V konvergent.

zu (c) Nach oben gilt:

$$||f||^2 = ||\mathcal{F}_m(f)||^2 + ||f - \mathcal{F}_m(f)||^2$$

Hieraus folgt die Behauptung.

□

10. Februar 2011

Schließlich noch eine weitere Definition:

Sei $(e_j)_{j\in J}$ weiterhin ein ONS in V wie oben.
Sei W der von $\{e_j \mid j \in J\}$ aufgespannte Untervektorraum von V.
Dann ist $(e_j)_{j\in J}$ vollständig, wenn $\overline{W} = V$.

Satz 13

Sei $(e_j)_{j\in J}$ ein vollständiges ONS im Hilbertraum V, wobei $J = \mathbb{N}$ oder $J = \mathbb{Z}$. Dann konvergiert für jedes $f \in V$ die Fourierreihe von f gegen f.

Beweis:
Sei W der von $\{e_j \mid j \in J\}$ aufgespannte Untervektorraum und für $m \in \mathbb{N}$ sei W_m der von $\{e_j \mid j \in J, |j| \leq m\}$ aufgespannte Untervektorraum. Sei $f \in V$ und $\varepsilon > 0$. Wegen Vollständigkeit existiert dann $g \in W$ mit $||f - g|| < \varepsilon$. Dann existiert m_0 mit $g \in W_{m_0}$. Sei nun $m \geq m_0$. Dann ist auch $g \in W_m$ und somit gilt nach Lemma 11

$$||f - \mathcal{F}_m(f)|| \leq ||f - g|| < \varepsilon$$

□

Wir wenden dies auf unsere zwei früheren Beispiele an:
Sei also $I = [0, 2\pi]$ und wieder $V = L^2(I, \mathbb{C})$ mit dem etwas modifizierten Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\overline{g}\mathrm{d}x$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ definiere $f_k : I \to \mathbb{C}$ durch $f_k(t) = e^{ikt}$. Dann ist $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein ONS in V. Wir wollen zeigen, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ vollständig ist.
Sei hierzu W der von $\{f_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ aufgespannte Untervektorraum. Weiterhin sei S die Menge aller stetigen Funktionen von I nach $\mathbb{C}$ mit $h(0) = h(2\pi)$. Nach Analysis 2 ist $S \subset \overline{W}$. Aber nach Satz 10 (b) (etwas modifiziert) ist S dicht in V, d.h. $\overline{S} = V$. Somit ist $\overline{W} = V$. Also ist $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ vollständig. Somit konvergiert für alle $f \in V$ die Fourierreihe von f bezüglich $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ gegen f (in V !!)

Wir schreiben noch einmal hin, was dies explizit bedeutet:

Sei $f \in L^2(I, \mathbb{C})$. Für $k \in \mathbb{Z}$ setze

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} fe^{-ikt}\mathrm{d}t$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$ bezüglich $||\ ||_2$ gegen f, d.h. es gilt

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}\left|f(t) - \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikt}\right|^2 \mathrm{d}t = 0$$

Analog zeigt man, dass das ONS $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\right)$ vollständig ist (im modifizierten $L^2(I)$).

Schließlich behandeln wir noch die Frage, wann im obigen Fall die Fourierreihe von f punktweise oder sogar gleichmäßig gegen f konvergiert. Dabei setzen wir f 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

Definition

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch.
f ist stückweise (stetig) differenzierbar, wenn es eine Unterteilung $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_r = 2\pi$ von $[0, 2\pi]$ gibt, so dass für $k < r$ $f \restriction [a_k, a_{k+1}]$ (stetig) differenzierbar ist.

Satz 14

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 2π-periodische Funktion, die stückweise stetig differenzierbar ist. Dann konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f.

Beweis:
Es genügt zu zeigen, dass die Fourierreihe von f gleichmäßig konvergiert. Denn ist dann g der punktweise Limes, so folgt, dass $f = g$ fast überall ist, da ja die Fourierreihe von f auf $[0, 2\pi]$ bezüglich der $|| \, ||_2$ gegen f konvergiert. Sei $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$ die Fourierreihe von f. Da $\left|\left|a_k e^{ikt} + a_{-k} e^{-ikt}\right|\right|_\infty \leq |a_k| + |a_{-k}|$ gilt, genügt es zu zeigen, dass $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|$ beschränkt ist.
Nach Voraussetzung ist f' stückweise stetig, und daher

$$f' \restriction [0, 2\pi] \text{ eine Fourierreihe } \sum_{k=-\infty}^{\infty} a'_k e^{-ikt}$$

Dabei gilt

$$2\pi a'_k = \int_0^{2\pi} f'(t) \cdot e^{-ikt} \, \mathrm{d}t = f(t) \cdot e^{-ikt} \Big|_0^{2\pi} + ik \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, \mathrm{d}t = 2\pi i k a_k$$

Somit gilt für $k \neq 0$

$$|a_k| = |a'_k| \cdot \frac{1}{|k|} \leq \frac{1}{2} \left(|a'_k|^2 + \frac{1}{k^2} \right)$$

(da $uv \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$)

Aber $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} |a'_k|^2$ ist nach der Besselschen Ungleichung konvergent und $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent.

□