Prof. Dr. H.-D. Donder
Andreas Fackler, Parmenides Garcia Cornejo

Sommersemester 2010
30. Mai 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Lösungen Übungsblatt 6

Lösung Aufgabe 1.

f ist nicht stetig in $(0,0)$:

Für $y \neq 0$, $\underset{(0,y)\longrightarrow}{\text{Lim}} f(0,y) = 0$.

Für $y = x \neq 0$, $\underset{(x,y)\longrightarrow}{\text{Lim}} f(x,y) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$.

Lösung Aufgabe 2.

Man beachte, dass die Funktionen

$f_1 \colon X \longrightarrow \mathbb{R},\ f_1(x) = f(x) - g(x)$

$f_2 \colon X \longrightarrow \mathbb{R},\ f_2(x) = f(x) + g(x)$

$f_3 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f_1(x) = |x|$

$f_4 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f_4(x) = \frac{1}{2}x$

stetig sind.

Da $\forall x \in X . h(x) = \frac{|f(x) - g(x)| + f(x) + g(x)}{2} = f_4 \circ ((f_3 \circ f_1) + f_2)(x)$, dann ist h auch stetig.

Lösung Aufgabe 3.

$[0,1)$ ist nicht abgeshlossen:

Es sei $a_n := 1 - \frac{1}{n+1}$, mit $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,\ 1)$ mit $\underset{n \longrightarrow \infty}{\text{Lim}} a_n = 1 \notin [0,1)$; das heisst, 1 ist ein Häufingspunkt von $[0,1)$ der nicht in $[0,1)$ liegt. Somit $[0,1)$ ist nicht abgeschlossen.

$[0,1)$ ist nicht offen:

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig und $B_\varepsilon(0) := \{x \in \mathbb{R} | |x - 0| < \varepsilon\}$ der offene Kugel in $\mathbb{R}$ mit Radius ε und Mittelpunkt 0. Dann $-\frac{\varepsilon}{2} \in B_\varepsilon(0) \cap (-\infty, 0)$ und deswegen $B_\varepsilon(0) \not\subset [0,1)$. Dieses zeigt, dass für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $B_\varepsilon(0) \not\subset [0,1)$. Also $[0,1)$ ist nicht offen.

Lösung Aufgabe 4.

Seien $U, V \subset \mathbb{R}$ nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Falls U, V offene sind, dann $U \times V$ ist offen.

Beweis:

Da U, V nicht leer sind, dann ist $U \times V$ nicht leer. Sei $(u, v) \in U \times V$ beliebig. Da $u \in U$ und $v \in V$ und U und V offen sind, dann existieren $\varepsilon_u, \varepsilon_v \in \mathbb{R}^+$, so dass $B_{\varepsilon_u}(u) := \{x \in \mathbb{R} | |x - u| < \varepsilon_u\} \subset U$ und $B_{\varepsilon_v}(v) := \{x \in \mathbb{R} | |x - v| < \varepsilon_v\} \subset V$.

Sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_u, \varepsilon_v\}$ und $B_\varepsilon((u, v)) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \|(x, y) - (u, v)\| < \varepsilon\}$. Dann

$(x, y) \in B_\varepsilon((u, v)) \Longrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} < \varepsilon \Longrightarrow$
$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x - u)^2 + (y - v)^2 < \varepsilon^2 \Longrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x - u)^2 < \varepsilon^2 > (y - v)^2 \Longrightarrow$
$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge |x - u| < \varepsilon = \min\{\varepsilon_u, \varepsilon_v\} > |y - v| \Longrightarrow$
$x \in B_{\varepsilon_u}(u) \subset U \wedge y \in B_{\varepsilon_v}(v) \subset V \Longrightarrow (x, y) \in U \times V$. Das heisst, $B_\varepsilon((u, v)) \subset U \times V$ und deswegen $U \times V$ ist offen.

Falls $U \times V$offen ist, dann U, V sind offen.

Beweis:

Sei $u \in U$ und $v \in V$ beliebig. Dann $(u, v) \in U \times V$ und da $U \times V$ offen ist, dann existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so dass $B_\varepsilon((u, v)) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \|(x, y) - (u, v)\| < \varepsilon\} \subset U \times V$. Sei $\varepsilon_u := \varepsilon =: \varepsilon_v$.

Wir zeigen $B_{\varepsilon_u}(u) := \{x \in \mathbb{R} | |x - u| < \varepsilon_u\} \subset U$.

Man beachte, dass $B_{\varepsilon_u}(u) \times \{v\} = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 | x \in B_{\varepsilon_u}(u)\} =$
$\{(x, v) \in \mathbb{R}^2 | |x - u| < \varepsilon_u\} = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{|x - u|^2 + |v - v|^2} < \varepsilon_u = \varepsilon\}$
$\subset B_\varepsilon((u, v)) \subset U \times V$. Dass heisst, $B_{\varepsilon_u}(u) \subset U$ und deswegen U ist offen.

Man beweis Analog, dass $B_{\varepsilon_v}(v) := \{y \in \mathbb{R} | |y - v| < \varepsilon_v\} \subset V$ und deswegen V ist auch offen.