Andreas Fackler 9. Juli 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 11

Aufgabe 1: Sei f eine solche Funktion. Da die Ableitung f' konstant ist, ist sie insbesondere auch stetig, also lässt sich der Mittelwertsatz anwenden und wir erhalten für jedes $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 f'(0 + t(x-0)) \cdot (x-0)\mathrm{d}t = f(0) + \int_0^1 E_n \cdot x\mathrm{d}t = f(0) + x$$

Umgekehrt ist auch jede Funktion der Form $f(x) = a + x$ für ein $a \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit Ableitung E_n. Die gesuchte Funktionenmenge ist also genau:

$$\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, f(x) = a + x \mid a \in \mathbb{R}^n\}$$

Aufgabe 2: $\Delta f = \mathrm{D}_1\mathrm{D}_1 f + \mathrm{D}_2\mathrm{D}_2 f = \mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 g + \mathrm{D}_2(-\mathrm{D}_1 g) = \mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 g - \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 g = 0$, da g zweimal stetig differenzierbar ist, sich die Richtungsableitungen also vertauschen lassen. Ebenso ist $\Delta g = \mathrm{D}_1\mathrm{D}_1 g + \mathrm{D}_2\mathrm{D}_2 g = \mathrm{D}_1(-\mathrm{D}_2 f) + \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f = -\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f + \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f = 0$.

Aufgabe 3: Der Gradient von f ist $\mathrm{D}f(x,y) = (3x^2+3y, 3y^2+3x) = 3(x^2+y, y^2+x)$. Er ist $(0,0)$ genau dann, wenn $y = -x^2$ und $x = -y^2$; dies impliziert $x = -x^4$, also $x = 0$ oder $x = -1$. Der Gradient verschwindet daher genau bei $(0,0)$ und $(-1,-1)$. Die Hesse-Matrix in (x,y) ist:

$$\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}$$

Es ist also $\det(\mathrm{Hess} f(0,0)) = -9$; damit ist die Matrix indefinit und $(0,0)$ ist kein Extremum. Andererseits ist

$$\det(\mathrm{Hess} f(-1,-1)) = \det \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = 36 - 9 > 0$$

und der linke obere Eintrag der Marix ist negativ; also ist die Matrix negativ definit und $(-1,-1)$ ein lokales Maximum.

Aufgabe 4: Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Wir betrachten die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, g(t) = (x + t(y - x), y + t(x - y))$. Diese ist differenzierbar und es gilt nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(t) &= f'(g(t)) \cdot g'(t) = (\mathrm{D}_1 f(g(t)), \mathrm{D}_2 f(g(t))) \cdot \begin{pmatrix} y - x \\ x - y \end{pmatrix} \\
&= (y - x)\mathrm{D}_1 f(g(t)) + (x - y)\mathrm{D}_2 f(g(t)) \\
&= (x - y)(\mathrm{D}_1 f(g(t)) - \mathrm{D}_2 f(g(t))) = 0
\end{aligned}$$

Also ist $f \circ g$ konstant und insbesondere:

$$f(x, y) = f(g(0)) = f(g(1)) = f(y, x)$$