Prof. Dr. H.-D. Donder
Andreas Fackler, Parmenides Garcia Cornejo

Sommersemester 2010
21. Juni 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und seien $f, g\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in a.

Zeigen Sie, dass $\operatorname{grad}(fg)(a) = g(a) \cdot \operatorname{grad} f(a) + f(a) \cdot \operatorname{grad} g(a)$

Aufgabe 2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für eine zweimal differenzierbare Funktion $h\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, sei $\triangle h = \Sigma_{i=1}^n D_i D_i h$. Seien $f, g\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $\triangle(fg)(x) = f(x) \triangle g(x) + g(x) \triangle f(x) + 2f'(x)g'(x)$.

Aufgabe 3. Sei $f\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x) = (\cos x, \sin x)$.

Zeigen Sie, dass es kein $\xi \in [0, 2\pi]$ gibt mit $f(2\pi) - f(0) = f'(\xi) \cdot 2\pi$

Aufgabe 4. Seien $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ und $f\colon U_\varepsilon(a) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Weiterhin, sei $K \in \mathbb{R}$ mit $\| f'(x) \| \leqslant K$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie, dass f gleichmässig stetig ist.

Abgabe ab dem 28. Juni 2010 in den Tutorien.