

# Modelle der Mengenlehre

## Lösung der Klausur

**Aufgabe 1.** Geben Sie an, welche der folgenden Mengen konnex sind:

	konnex	nicht konnex
$\omega$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{5, 10, 15\}$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{\emptyset, V_\omega, \omega\}$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\emptyset$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

[4 Punkte]

**Aufgabe 2.** Welche der folgenden Formeln sind  $\Delta_1$  (d. h.  $\Delta_1^{\text{ZF}^-}$ )?

	$\Delta_1$	nicht $\Delta_1$
$x = y$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt eine Wohlordnung auf $x$ .	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$x = \text{Def}(y)$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
GCH	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$x = L_\alpha$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

[5 Punkte]

**Aufgabe 3.** Wie lautet das Reflektionsprinzip?

Seien ...	Dann ...
<input checked="" type="checkbox"/> $\varphi_0(\vec{x}), \dots, \varphi_n(\vec{x})$ ZF-Formeln.	<input type="checkbox"/> $\exists \alpha \forall \beta \geq \alpha \forall \vec{x} \in V_\beta \bigwedge_{i=0}^n (\varphi_i(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi_i^{V_\beta}(\vec{x})).$
<input type="checkbox"/> $\varphi_0(\vec{x}), \dots, \varphi_n(\vec{x})$ $\Sigma_0$ -Formeln.	<input checked="" type="checkbox"/> $\forall \alpha \exists \beta \geq \alpha \forall \vec{x} \in V_\beta \bigwedge_{i=0}^n (\varphi_i(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi_i^{V_\beta}(\vec{x})).$
<input type="checkbox"/> $\varphi_0(\vec{x}), \dots, \varphi_n(\vec{x})$ $\Delta_0$ -Formeln.	<input type="checkbox"/> $\exists \alpha \forall \beta \geq \alpha \exists \vec{x} \in V_\beta \bigwedge_{i=0}^n (\varphi_i(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi_i^{V_\beta}(\vec{x})).$

[2 Punkte]

**Aufgabe 4.** Welche Aussagen sind in ZF wahr/falsch/unentscheidbar?

	wahr	falsch	unentscheidbar
$\alpha \in \text{On}$ ist unendlich gdw $1 + \alpha = \alpha$ .	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt eine Wohlordnung auf $\omega$ .	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt eine Wohlordnung auf $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\text{HOD}^L = L$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(V \neq \text{HOD})^L$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt ein surjektives $F : \text{On} \rightarrow V$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Es gibt ein surjektives $F : \text{On} \rightarrow \text{HOD}$ .	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

[7 Punkte]

**Aufgabe 5.** Welche Aussagen sind in ZFC wahr/falsch/unentscheidbar?

	wahr	falsch	unentscheidbar
$2^{\omega_2} = \omega_2$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$2^{\omega_2} = \omega_3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\omega_\omega$ ist regulär.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\omega_{\omega+1}$ ist regulär.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\text{cf}(2^{\omega_2}) \geq \omega_3$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

[5 Punkte]

**Aufgabe 6.** Geben Sie an, welche der folgenden Mengen Elemente von  $\text{Def}(V_\omega)$  sind:

	$\in \text{Def}(V_\omega)$	$\notin \text{Def}(V_\omega)$
$\omega$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$V_{\omega+1}$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\{1, 2, 4\}$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{3n \mid n \in \omega\}$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

[5 Punkte]

**Aufgabe 7.** Hat jede Bedingungs Menge  $\langle \mathbb{P}, \leq, \mathbb{1} \rangle$  die folgende Eigenschaft?

	Ja	Nein
Für jedes $p \in \mathbb{P}$ gilt $p \leq \mathbb{1}$ .	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Für alle $p, q \in \mathbb{P}$ existiert ein $r \in \mathbb{P}$ mit $r \leq p, q$ .	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

[2 Punkte]

**Aufgabe 8.** Sei  $M$  abzählbares, transitives Modell von ZFC,  $\mathbb{P} = \{p : n \rightarrow 3 \mid n \in \omega\}$  mit  $p \leq q$  gdw  $p \supseteq q$ . Sei  $g$  ein Name für  $\bigcup \dot{G}$  (also  $\emptyset \Vdash g = \bigcup \dot{G}$ ). Welche Aussagen sind richtig?

	stimmt	stimmt nicht
$\emptyset \Vdash \text{dom}(g) = \omega$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt ein $p$ mit $p \Vdash \text{dom}(g)$ ist endlich.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\} \Vdash g(1) = 2$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\} \Vdash g(2) \neq 0$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\} \Vdash g(2) = 0$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\emptyset \Vdash g \notin L$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\emptyset \Vdash 2 \in \text{rng}(g)$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt ein $p$ mit $p \Vdash g$ ist nur endlich oft gleich 2.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\emptyset \Vdash \{n \mid g(n) = 3\} \notin L$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\emptyset \Vdash \{n \mid g(n) = 2\} \notin L$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

[10 Punkte]