Prof. Dr. H.-D. Donder
Andreas Fackler

Sommersemester 2012
28. Juni 2012

Modelle der Mengenlehre
Übungsblatt 9

Sei M abzählbares, transitives ZF-Modell, $\langle \mathbb{P}, \leq, 1 \rangle \in M$ Bedingungsmenge und $\Vdash$ die zugehörige Forcing-Relation.

Aufgabe 1: Es gelte:

$$\forall p \in \mathbb{P}\ \exists q_0, q_1 \leq p\ q_0, q_1 \text{ unverträglich}$$

Sei $G \subseteq \mathbb{P}$ M-generisch. Man zeige, dass $G \notin M$.

Aufgabe 2: Sei $D \subseteq \mathbb{P}$ mit $D \in M$. Weiterhin sei $G \subseteq \mathbb{P}$ M-generisch, und sei $p \in G$. Es gelte:

$$\forall q \leq p\ \exists r \in D\ q, r \text{ verträglich}$$

Man zeige, dass $G \cap D \neq \emptyset$.

Aufgabe 3: Sei

$$\mathbb{P} = \{p \in M \mid p : n \to \omega, n \in \omega\},$$

G M-generisch und $f = \bigcup G : \omega \to \omega$. Zeigen Sie, dass kein $g \in M$ existiert mit $g \geq f$.
(Für $f, g : \omega \to \omega$ bedeutet $g \geq f$, dass $\forall n \in \omega\ g(n) \geq f(n)$.)

Aufgabe 4: Sei

$$\mathbb{P} = \{p \in M \mid p : n \to \omega_1^M, n \in \omega\}.$$

Sei $\alpha = \omega_1^M$, das heißt, $K_G(\widehat{\alpha}) = \omega_1^M$. Zeigen Sie, dass $1 \Vdash \omega_1 > \widehat{\alpha}$.

Besprechung am 5. Juli in der Übung.