



Prof. Dr. H.-D. Donder
Andreas Fackler

Sommersemester 2012
24. Mai 2012

Modelle der Mengenlehre Übungsblatt 5

Aufgabe 1: Sei W ein inneres Modell von ZF . Man zeige, dass $V_\omega \subseteq W$.

Aufgabe 2: Sei W ein inneres Modell von ZF , $\alpha \in \text{On}$ eine Limesordinalzahl. Man zeige:

- (a) $(\text{cf}(\alpha) = \alpha) \rightarrow (\text{cf}(\alpha) = \alpha)^W$
- (b) $(\text{cf}(\alpha) = \omega)^W \rightarrow (\text{cf}(\alpha) = \omega)$

Aufgabe 3: Sei W ein inneres Modell von ZF . Seien $\varphi(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ ZF -Formeln mit höchstens x frei, und seien $\psi_0(x)$ Σ_1 -Formel und $\psi_1(x)$ Π_1 -Formel. Weiterhin sei

$$ZF \vdash \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow \psi_0(x) \leftrightarrow \psi_1(x)).$$

Man zeige, dass

$$ZF \vdash \forall x \in W (\varphi(x) \leftrightarrow \varphi^W(x)).$$

Aufgabe 4: Sei $\varphi(\vec{x})$ eine ZF -Formel. Weiterhin sei $C \subseteq \text{On}$ abgeschlossen und unbeschränkt in On . Man zeige:

$$\exists \beta \in C \forall \vec{x} \in V_\beta (\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi^{V_\beta}(\vec{x}))$$

Besprechung am 31. Mai in der Übung.