



Modelle der Mengenlehre

Übungsblatt 11: Lösung

Aufgabe 1: Geben Sie an, welche der folgenden Relationen $R \subseteq \text{On}^2$ (stark) fundiert sind:

| $R(x, y)$ gdw: | nicht fundiert | fundiert (nicht stark) | stark fundiert |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $x \in y$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $y \in x$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $y = 0 \neq x$ oder $y \neq 0 \neq x \wedge x \in y$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $x \neq x$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Aufgabe 2: Welche der folgenden Formeln sind Σ_0 ?

| | Σ_0 | nicht Σ_0 |
|----------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| x ist transitiv. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $x \in y$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| α ist regulär. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| AC | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| x ist eine fundierte Relation. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Aufgabe 3: Wie lautet das Kondensationslemma?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> Sei $L_\kappa \models \text{ZF}^-$ und $L_\kappa \prec X$. | <input type="checkbox"/> Dann existiert ein α mit $X = L_\alpha$. |
| <input checked="" type="checkbox"/> Sei $L_\kappa \models \text{ZF}^-$ und $X \prec L_\kappa$. | <input type="checkbox"/> Dann ist $X \in L$. |
| <input type="checkbox"/> Sei $L_\kappa \models \text{ZF}^-$ und $X \subseteq L_\kappa$. | <input checked="" type="checkbox"/> Dann existiert genau ein α mit $X \cong L_\alpha$. |

Aufgabe 4: Welche Aussagen sind in ZF wahr/falsch/unentscheidbar?

| | wahr | falsch | unentscheidbar |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $\text{cf}(\alpha + \beta) = \text{cf}(\alpha) + \text{cf}(\beta)$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\text{cf}(\alpha + \beta) = \text{cf}(\beta)$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Es gibt eine Wohlordnung auf $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))^{\text{HOD}}$. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\text{HOD}^L = V$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Falls $V = L$, so ist $\forall \alpha \in \text{On } V_\alpha = L_\alpha$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Es gibt ein surjektives $F : \text{On} \rightarrow \mathcal{P}(\omega)$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Es gibt ein surjektives $F : \text{On} \rightarrow L$. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 5: Welche Aussagen sind in ZFC wahr/falsch/unentscheidbar?

| | wahr | falsch | unentscheidbar |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| $(2^{\omega_1} = \omega_1)^L$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $(2^{\omega_1} = \omega_2)^L$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_2$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\omega_\omega^\omega > \omega_\omega$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\text{cf}(2^{\omega_5}) = \omega_5$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 6: Geben Sie an, welche der folgenden Mengen Elemente von $\text{Def}(\omega)$ sind:

| | $\in \text{Def}(\omega)$ | $\notin \text{Def}(\omega)$ |
|----------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ω | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\mathcal{P}(\omega)$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $\{1, 2, 4\}$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 9 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\{3n \mid n \in \omega\}$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Aufgabe 7: Welche der folgenden Eigenschaften hat jede dichte Teilmenge $D \subseteq \mathbb{P}$ einer Bedingungsmenge $\langle \mathbb{P}, \leq, \mathbb{1} \rangle$?

- Für alle $p, q \in \mathbb{P}$ existiert ein $r \leq p, q$ mit $r \in D$.
- Es existiert ein $p \leq \mathbb{1}$ mit $p \in D$.

Aufgabe 8: Sei M abzählbares, transitives Modell von ZFC, $\mathbb{P} = \{p \subseteq \omega \mid p \text{ endlich}\}$ mit $p \leq q$ gdw $q = p \cup n$ für ein $n \in \omega$. Sei A ein Name für $\bigcup \dot{G}$. Welche Aussagen sind richtig?

| | stimmt | stimmt nicht |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $\emptyset \Vdash A$ ist unendlich. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Es gibt ein p mit $p \Vdash A$ ist endlich. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $\{5, 10\} \Vdash 5 \in A$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\{5, 10\} \Vdash 12 \notin A$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $\{5, 10\} \Vdash 8 \notin A$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\emptyset \Vdash A \notin L$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\emptyset \Vdash A$ enthält eine ungerade Zahl. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Es gibt ein p mit $p \Vdash A$ enthält keine gerade Zahl. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $\emptyset \Vdash (A \cup \{1, 2, 3\}) \notin L$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\emptyset \Vdash (A \cap \{1, 2, 3\}) \notin L$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |