



LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT



Prof. Dr. H.-D. Donder
Andreas Fackler

Sommersemester 2012
18. Juli 2012

Modelle der Mengenlehre

Übungsblatt 11: Probeklausur

Aufgabe 1: Geben Sie an, welche der folgenden Relationen $R \subseteq \text{On}^2$ (stark) fundiert sind:

$R(x, y)$ gdw:	nicht fundiert	fundiert (nicht stark)	stark fundiert
$x \in y$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$y \in x$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$y = 0 \neq x$ oder $y \neq 0 \neq x \wedge x \in y$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x \neq x$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 2: Welche der folgenden Formeln sind Σ_0 ?

	Σ_0	nicht Σ_0
x ist transitiv.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x \in y$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
α ist regulär.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AC	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
x ist eine fundierte Relation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 3: Wie lautet das Kondensationslemma?

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> Sei $L_\kappa \models \text{ZF}^-$ und $L_\kappa \prec X$. | <input type="checkbox"/> Dann existiert ein α mit $X = L_\alpha$. |
| <input type="checkbox"/> Sei $L_\kappa \models \text{ZF}^-$ und $X \prec L_\kappa$. | <input type="checkbox"/> Dann ist $X \in L$. |
| <input type="checkbox"/> Sei $L_\kappa \models \text{ZF}^-$ und $X \subseteq L_\kappa$. | <input type="checkbox"/> Dann existiert genau ein α mit $X \cong L_\alpha$. |

Aufgabe 4: Welche Aussagen sind in ZF wahr/falsch/unentscheidbar?

	wahr	falsch	unentscheidbar
$\text{cf}(\alpha + \beta) = \text{cf}(\alpha) + \text{cf}(\beta)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\text{cf}(\alpha + \beta) = \text{cf}(\beta)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt eine Wohlordnung auf $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))^{\text{HOD}}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\text{HOD}^L = V$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Falls $V = L$, so ist $\forall \alpha \in \text{On } V_\alpha = L_\alpha$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt ein surjektives $F : \text{On} \rightarrow \mathcal{P}(\omega)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt ein surjektives $F : \text{On} \rightarrow L$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 5: Welche Aussagen sind in ZFC wahr/falsch/unentscheidbar?

	wahr	falsch	unentscheidbar
$(2^{\omega_1} = \omega_1)^L$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(2^{\omega_1} = \omega_2)^L$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\omega_\omega^\omega > \omega_\omega$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\text{cf}(2^{\omega_5}) = \omega_5$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 6: Geben Sie an, welche der folgenden Mengen Elemente von $\text{Def}(\omega)$ sind:

	$\in \text{Def}(\omega)$	$\notin \text{Def}(\omega)$
ω	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathcal{P}(\omega)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{1, 2, 4\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{3n \mid n \in \omega\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 7: Welche der folgenden Eigenschaften hat jede dichte Teilmenge $D \subseteq \mathbb{P}$ einer Bedingungsmenge $\langle \mathbb{P}, \leq, \mathbb{1} \rangle$?

- Für alle $p, q \in \mathbb{P}$ existiert ein $r \leq p, q$ mit $r \in D$.
- Es existiert ein $p \leq \mathbb{1}$ mit $p \in D$.

Aufgabe 8: Sei M abzählbares, transitives Modell von ZFC, $\mathbb{P} = \{p \subseteq \omega \mid p \text{ endlich}\}$ mit $p \leq q$ gdw $q = p \cap n$ für ein $n \in \omega$. Sei A ein Name für $\bigcup \dot{G}$. Welche Aussagen sind richtig?

	stimmt	stimmt nicht
$\emptyset \Vdash A$ ist unendlich.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt ein p mit $p \Vdash A$ ist endlich.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{5, 10\} \Vdash 5 \in A$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{5, 10\} \Vdash 12 \notin A$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{5, 10\} \Vdash 8 \notin A$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\emptyset \Vdash A \notin L$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\emptyset \Vdash A$ enthält eine ungerade Zahl.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt ein p mit $p \Vdash A$ enthält keine gerade Zahl.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\emptyset \Vdash (A \cup \{1, 2, 3\}) \notin L$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\emptyset \Vdash (A \cap \{1, 2, 3\}) \notin L$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>