LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. H.-D. Donder

Andreas Fackler

Sommersemester 2012

5. Juli 2012

Modelle der Mengenlehre
Übungsblatt 10

Aufgabe 1: Es gelte ZFC und GCH, das heißt, $\forall\kappa\ 2^\kappa = \kappa^+$. Zeigen Sie, dass dann

$$\forall\kappa \quad \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+.$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie: Falls $V \neq L$, so gibt es ein $a \in V$ mit $a \notin L[a]$.

Sei M abzählbares, transitives ZFC-Modell, $\langle \mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}\rangle \in M$ Bedingungsmenge und $\Vdash$ die zugehörige Forcing-Relation.

Aufgabe 3: Sei $G \subseteq \mathbb{P}$. Es gelte:
(G1) $\mathbb{1} \in G$ und: $p \in G \wedge p \leq q \to q \in G$.
(G2) Falls $p, q \in G$, so gibt es ein $r \leq p, q$ in G.
(G3') Falls $D \in M$ dicht in $\mathbb{P}$ und $\forall p \in D \forall q \leq p\ q \in D$, so $D \cap G \neq \emptyset$.
Zeigen Sie, dass G M-generisch ist.

Aufgabe 4: Sei $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ und $M \models \kappa$ regulär. $\mathbb{P}$ erfüllt die κ-*Antikettenbedingung*, wenn jede Antikette in M kleiner als κ ist, das heißt:

$$M \quad \models \quad \forall A \subseteq \mathbb{P}\ (A \text{ Antikette} \to |A| < \kappa)$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall $\kappa \in \mathrm{Card}^{M[G]}$ für jedes M-generische G.

Besprechung am 12. Juli in der Übung.