

Logik

Tutorium 8

Aufgabe 1: Finde Ableitungen für folgende Regeln:

1.
$$\frac{\Gamma \varphi \neg\psi \quad \Gamma \psi \varphi}{\Gamma \psi \theta}$$

2.
$$\frac{\Gamma \neg\neg\varphi}{\Gamma\varphi}$$

3.
$$\frac{\Gamma \varphi_x(t) \psi}{\Gamma \forall x\varphi \psi}$$

Aufgabe 2: Zeige, dass die Regel

$$\frac{\Gamma \varphi_x(t) \psi}{\Gamma \exists x\varphi \psi}$$

(ohne weitere Voraussetzung an φ , x und t) nicht korrekt ist.

Lösungsskizze 1: 1. Mit (KS): $\Gamma\psi\neg\psi$, (Wid) mit $\Gamma\psi\psi$.

2.

	$\Gamma \neg\neg\varphi$	(1)
(Ant) aus (1)	$\Gamma \neg\varphi \neg\neg\varphi$	(2)
(Vor)	$\Gamma \neg\varphi \neg\varphi$	(3)
(Wid) aus (2), (3)	$\Gamma \neg\varphi \varphi$	(4)
(Vor)	$\Gamma \varphi \varphi$	(5)
(FU) aus (4), (5)	$\Gamma \varphi$	(6)

3.

	$\Gamma \varphi_x(t) \psi$	(1)
(Vor)	$\Gamma \neg\exists x\neg\varphi \neg\varphi_x(t) \neg\varphi_x(t)$	(2)
(\exists S)	$\Gamma \neg\exists x\neg\varphi \neg\varphi_x(t) \exists x\neg\varphi$	(3)
(Vor)	$\Gamma \neg\exists x\neg\varphi \neg\varphi_x(t) \neg\exists x\neg\varphi$	(4)
(Wid)	$\Gamma \neg\exists x\neg\varphi \neg\varphi_x(t) \psi$	(5)
(Ant) aus (1)	$\Gamma \neg\exists x\neg\varphi \varphi_x(t) \psi$	(6)
(FU)	$\Gamma \neg\exists x\neg\varphi \psi$	(7)

Lösungsskizze 2: Sei etwa Γ leer, φ gleich $x = y$ und ψ gleich $x = y$. Dann ist $\Gamma \varphi_x(t) \psi$ gleich $x = y \ x = y$ korrekt, denn $\models \forall x\forall y(x = y \rightarrow x = y)$. Mit der Regel lässt sich daraus aber $\exists xx = y \ x = y$ ableiten, was nicht korrekt ist. In einem Modell mit mehr als einem Element gilt nämlich nicht $\forall y\forall x((\exists xx = y) \rightarrow x = y)$.