Prof. Dr. H.-D. Donder
Andreas Fackler

Wintersemester 2011/2012
14. November 2011

Logik
Tutorium 4

Aufgabe 1: Sei L die Sprache 1. Stufe mit $\mathrm{Funk}_L^1 = \{f\}$, $\mathrm{Funk}_L^2 = \{d\}$, $\mathrm{Konst}_L = \{O\}$ und $\mathrm{Rel}_L^2 = \{\sqsubset\}$, und sei φ die L-Formel

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \forall x_4 ((O \sqsubset x_1 \to O \sqsubset x_2) \wedge (d(x_3, x_4) \sqsubset x_2 \to d(f(x_3), f(x_4)) \sqsubset x_1)).$$

Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur mit Träger $\mathbb{R}$, $d^{\mathfrak{A}}(a,b) = |a - b|$, $O^{\mathfrak{A}} = 0$ und $\sqsubset^{\mathfrak{A}} = <$. Was bedeutet die Aussage φ für $f^{\mathfrak{A}}$? Sei nun $f^{\mathfrak{A}}(a) = 3a + 2$. Bestimme eine Skolemsche Normalform φ^* von φ und eine Expansion $\mathfrak{A}^*$ von $\mathfrak{A}$, so dass $\mathfrak{A}^* \models \varphi^*$.

Aufgabe 2: Sei L eine Sprache 1. Stufe, T eine L-Theorie, φ eine Formel mit höchstens x, y frei, so dass (sub) für φ, y und $f(x)$ erfüllt ist, und es gelte:

$$T \models \forall x \exists z \forall y (\varphi \leftrightarrow z = y)$$

Sei $\overline{L} = L \cup \{f\}$ mit einem zusätzlichen einstelligen Funktionszeichen f und sei $\overline{T} = T \cup \{\forall x \ \varphi_y(f(x))\}$. Zeige, dass jedes Modell $\mathfrak{A}$ von T genau eine $\overline{L}$-Expansion besitzt, welche ein Modell von $\overline{T}$ ist, und dass für jede L-Aussage ψ gilt:

$$T \models \psi \quad \text{gdw} \quad \overline{T} \models \psi$$