Prof. Dr. H.-D. Donder
Andreas Fackler

Wintersemester 2011/2012
3. November 2011

Logik
Tutorium 2

Sei L eine Sprache 1. Stufe.

Aufgabe 1: Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, $a \in \mathfrak{A}$ und, φ eine L-Formel mit höchstens der freien Variable x. Zeige:

(a) $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \exists x \varphi)_x[a]$

(b) $\mathfrak{A} \models (\forall x \varphi \to \varphi)_x[a]$

(c) $\forall x \varphi \to \exists x \varphi$ ist allgemeingültig.

Aufgabe 2: Seien f, g einstellige Funktionszeichen und R ein einstelliges Relationszeichen von L. Finde L-Aussagen $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d, \varphi_e$, so dass für jede L-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt:

(a) $\mathfrak{A} \models \varphi_a$ gdw $f^{\mathfrak{A}}$ und $g^{\mathfrak{A}}$ Umkehrabbildungen voneinander sind.

(b) $\mathfrak{A} \models \varphi_b$ gdw die Bildmengen von $f^{\mathfrak{A}}$ und $g^{\mathfrak{A}}$ disjunkt sind.

(c) $\mathfrak{A} \models \varphi_c$ gdw die $f^{\mathfrak{A}} \restriction R = g^{\mathfrak{A}} \restriction R^{\mathfrak{A}}$, das heißt, wenn $f^{\mathfrak{A}}$ und $g^{\mathfrak{A}}$ auf $R^{\mathfrak{A}}$ übereinstimmen.

(d) $\mathfrak{A} \models \varphi_d$ gdw $R^{\mathfrak{A}} = \{a \in \mathfrak{A} \mid f^{\mathfrak{A}}(a) \neq g^{\mathfrak{A}}(a)\}$.

(e) $\mathfrak{A} \models \varphi_e$ gdw $f^{\mathfrak{A}}[R^{\mathfrak{A}}] \cap g^{\mathfrak{A}}[R^{\mathfrak{A}}]$ genau ein Element hat.

Aufgabe 3: Sei S ein zweistelliges Relationszeichen von L. φ sei die Formel

$$\forall x \forall y \forall z (\neg S(x,x) \wedge ((S(x,y) \wedge S(y,z)) \to S(x,z)))$$

und ψ sei die Formel

$$\exists x \forall y \neg S(y,x).$$

Beweise oder widerlege:

(a) Für jede endliche Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi$.

(b) Für jede Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi$.