Prof. Dr. H.-D. Donder
Andreas Fackler

Wintersemester 2011/2012
2. Februar 2012

Logik
Lösungsvorschlag zur Probeklausur

Aufgabe 1: Wir beweisen zunächst per Induktion über den Aufbau, dass das letzte Zeichen jedes L-Terms t diese Eigenschaft hat:
(T1): Ist t selbst eine Variable oder Konstante, so ist das offenbar der Fall.
(T2): Ist t von der Form $f(t_1, \ldots, t_n)$, so ist das letzte Zeichen eine rechte Klammer.

Nun beweisen wir die Aussage durch Induktion über den Aufbau einer L-Formel φ:
(F1): Ist φ von der Gestalt $t_1 = t_2$, so ist das letzte Zeichen von φ das letzte Zeichen von t_2, also Variable, Konstante oder rechte Klammer.
(F2), (F4): Ist φ gleich $R(t_1, \ldots, t_n)$ oder $(\psi \vee \theta)$, so ist das letzte Zeichen eine rechte Klammer.
(F3), (F5): Ist φ gleich $\neg\psi$ oder $\exists x\psi$, dann ist das letzte Zeichen von φ das letzte Zeichen von ψ und die Behauptung folgt aus der Induktionsannahme.

Aufgabe 2: Zunächst bringen wir φ in pränexe Normalform:

$$\forall x \exists y \forall z \exists w (R(x,y) \wedge (y = z \vee (R(z,w) \wedge \neg R(y,w))))$$

Wie im Beweis von Lemma 8 seien nun f, g neue Funktionszeichen. Dann ist die Skolemsche Normalform φ^* von φ:

$$\forall x \forall z (R(x, f(x)) \wedge (f(x) = z \vee (R(z, g(x,z)) \wedge \neg R(f(x), g(x,z)))))$$

Ein Modell $\mathfrak{A}$ von φ^* ist wie folgt gegeben: Der Träger von $\mathfrak{A}$ sei $\mathbb{N}$, $R^{\mathfrak{A}}(a,b)$ gelte genau dann, wenn $a + 1 = b$, $f^{\mathfrak{A}}(a) = a + 1$ und $g^{\mathfrak{A}}(a,b) = b + 1$. Tatsächlich gilt dann nämlich für alle $a, b \in \mathbb{N}$, dass $R^{\mathfrak{A}}(a, a+1)$, und falls $b \neq a+1$, so trifft $R^{\mathfrak{A}}(b, b+1)$ zu, aber $R(a+1, b+1)$ nicht.

Aufgabe 3: Angenommen, φ wäre so eine Formel. Setze $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, f(q) = \frac{q}{2}$. Dann ist f bijektiv, linear und monoton, also ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}$. Das heißt aber, dass $\mathfrak{A} \vDash \varphi_x[a]$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \vDash \varphi_x[q(a)]$. Es ist aber 1 eine ganze Zahl und $\frac{1}{2}$ nicht, im Widerspruch zur Annahme, dass φ genau auf die ganzen Zahlen zutrifft.

Aufgabe 4: Zuerst leiten wir aus der Voraussetzung $(\varphi\vee\psi)\wedge\theta$ (das heißt $\neg(\neg(\varphi\vee\psi)\vee\neg\theta)$) die Formel θ ab:

	$\Gamma \quad \neg(\neg(\varphi \vee \psi) \vee \neg\theta)$	(1)
(Vor)	$\Gamma \quad \neg\theta \quad \neg\theta$	(2)
($\vee$S) aus (2)	$\Gamma \quad \neg\theta \quad \neg(\varphi \vee \psi) \vee \neg\theta$	(3)
(Ant) aus (1)	$\Gamma \quad \neg\theta \quad \neg(\neg(\varphi \vee \psi) \vee \neg\theta)$	(4)
(Wid) aus (3), (4)	$\Gamma \quad \neg\theta \quad \theta$	(5)
(Ant)	$\Gamma \quad \theta \quad \theta$	(6)
(FU) aus (5), (6)	$\Gamma \quad \theta$	(7)

Damit können wir nun unter der Prämisse φ die gewünschte Formel $(\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$ (das heißt $\neg(\neg\varphi \vee \neg\theta) \vee \neg(\neg\psi \wedge \neg\theta))$ ableiten:

(Ant) aus (7)	$\Gamma \quad \varphi \quad \neg\theta \quad \theta$	(8)
(Vor)	$\Gamma \quad \varphi \quad \neg\theta \quad \neg\theta$	(9)
(Wid) aus (8), (9)	$\Gamma \quad \varphi \quad \neg\theta \quad (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$	(10)
(Vor)	$\Gamma \quad \varphi \quad \neg\varphi \quad \varphi$	(11)
(Vor)	$\Gamma \quad \varphi \quad \neg\varphi \quad \neg\varphi$	(12)
(Wid) aus (11), (12)	$\Gamma \quad \varphi \quad \neg\varphi \quad (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$	(13)
($\vee$A) aus (10), (13)	$\Gamma \quad \varphi \quad (\neg\varphi \vee \neg\theta) \quad (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$	(14)
(Vor)	$\Gamma \quad \varphi \quad \neg(\neg\varphi \vee \neg\theta) \quad (\varphi \wedge \theta)$	(15)
($\vee$S) aus (15)	$\Gamma \quad \varphi \quad \neg(\neg\varphi \vee \neg\theta) \quad (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$	(16)
(FU) aus (14), (16)	$\Gamma \quad \varphi \quad (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$	(17)

Analog dazu, mit ψ anstelle von φ, erhalten wir in den Schritten 18 bis 27:

Analog ...	$\Gamma \quad \psi \quad (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$	(27)
($\vee$A) aus (17), (27)	$\Gamma \quad (\varphi \vee \psi) \quad (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$	(28)

Es bleibt der Fall $\neg(\varphi \vee \psi)$, so dass wir mit der Fallunterscheidungsregel das Ergebnis erhalten:

(Vor)	$\Gamma \quad \neg(\varphi \vee \psi) \quad \neg(\varphi \vee \psi)$	(29)
($\vee$S)	$\Gamma \quad \neg(\varphi \vee \psi) \quad \neg(\varphi \vee \psi) \vee \neg\theta$	(30)
(Ant) aus (1)	$\Gamma \quad \neg(\varphi \vee \psi) \quad \neg(\neg(\varphi \vee \psi) \vee \neg\theta)$	(31)
(Wid) aus (30), (31)	$\Gamma \quad \neg(\varphi \vee \psi) \quad (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$	(32)
(FU) aus (28), (32)	$\Gamma \quad (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$	(33)

Aufgabe 5: Sei $Q_1 \subseteq \mathbb{N}^2$ so, dass $R_1(n)$ gdw $\exists m\ Q_1(n,m)$ und Q_2 analog. Dann gilt $S(n)$ gdw: $\exists m\ (\exists k \leq n(n = 2k \wedge Q_1(k,m)) \vee \exists k \leq n(n = 2k+1 \wedge Q_2(k,m)))$. Also ist S rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 6: Für jede natürliche Zahl n erfüllt die Struktur $(\mathbb{N}, S, +, \cdot, <, n+1)$ die ersten n der angegebenen Formeln – und die Theorie N. Daher ist $T \cup N$ endlich erfüllbar, also widerspruchsfrei. Wir zeigen noch, dass T rekursiv ist, dann folgt aus dem ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz die Unvollständigkeit von T. Es gilt aber $n \in T$ gdw es $k < \ell(n)$ gibt, so dass $n = \mathrm{num}(k) * \ulcorner < c \urcorner$.