LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. H.-D. Donder
Andreas Fackler

Wintersemester 2011/2012
17. April 2012

Logik
Lösungsvorschlag zur Nachholklausur

Aufgabe 1: Beweis per Induktion über den Aufbau der L-Formel θ:
(F1) Ist θ gleich $t_1 = t_2$, so kommt in θ ein $=$ vor.
(F2) Von der Form $R(t_1, \ldots, t_n)$ kann θ nicht sein, da L kein Relationszeichen R enthält.
(F3), (F4) und (F5): Ist θ gleich $\neg\varphi$ oder $(\varphi \vee \psi)$ oder $\exists x \varphi$, so kommt in θ ein $=$ vor, da nach Induktionsannahme in der Teilformel φ eines vorkommt.

Aufgabe 2: Seien f ein neues einstelliges und g ein neues zweistelliges Funktionszeichen. Da φ bereits pränex ist, erhalten wir die Skolemsche Normalform φ^* von φ, indem wir (wie im Beweis von Lemma 8) y durch $f(x)$ und z durch $g(x,w)$ ersetzen:

$$\forall x \forall w((\neg R(x,w) \vee \neg R(w,x)) \wedge R(x,f(x)) \wedge R(f(x),g(x,w)) \wedge R(g(x,w),x))$$

Ein Modell $\mathfrak{A}$ von φ^* erhält man beispielsweise, indem man als Träger von $\mathfrak{A}$ die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen wählt und definiert: $R^{\mathfrak{A}}(a,b)$ gdw $b-a-1$ durch 3 teilbar ist. Setze dann etwa $f^{\mathfrak{A}}(a) = a+1$ und $g^{\mathfrak{A}}(a,b) = a+2$. Tatsächlich gilt dann für alle $a, b \in \mathbb{Z}$, dass nicht gleichzeitig $R^{\mathfrak{A}}(a,b)$ und $R^{\mathfrak{A}}(b,a)$ gelten kann. Außerdem gilt $R^{\mathfrak{A}}(a,a+1)$, $R^{\mathfrak{A}}(a+1,a+2)$ und $R^{\mathfrak{A}}(a+2,a)$. Insgesamt folgt $\mathfrak{A} \vDash \varphi^*$.

Aufgabe 3: Angenommen, φ wäre so eine Formel. Setze $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(a) = i \cdot a$. Dann ist f bijektiv und linear, also ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}$. Das heißt aber, dass $\mathfrak{A} \vDash \varphi_x[a]$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \vDash \varphi_x[f(a)]$. Es ist jedoch 1 eine reelle Zahl und $i = f(1)$ nicht, im Widerspruch zur Annahme, dass φ genau auf die reellen Zahlen zutrifft.

Aufgabe 4: Wir leiten zunächst $\Gamma\ (\varphi \vee \forall x \psi)\ \varphi$ her. Man beachte, dass $\forall x \psi$ nur eine Abkürzung für $\neg\exists x \neg\psi$ ist.

	$\Gamma\quad (\varphi \vee \neg\exists x \neg\psi)$	(1)
	$\Gamma\quad \neg\psi$	(2)
(Ant) aus (2)	$\Gamma\quad \neg\exists x \neg\psi\quad \neg\psi$	(3)
($\exists$S) aus (3)	$\Gamma\quad \neg\exists x \neg\psi\quad \exists x \neg\psi$	(4)
(Vor)	$\Gamma\quad \neg\exists x \neg\psi\quad \neg\exists x \neg\psi$	(5)
(Wid) aus (4), (5)	$\Gamma\quad \neg\exists x \neg\psi\quad \varphi$	(6)
(Vor)	$\Gamma\quad \varphi\quad \varphi$	(7)
($\vee$A) aus (6), (7)	$\Gamma\quad (\varphi \vee \neg\exists x \neg\psi)\quad \varphi$	(8)

An dieser Stelle kann man die Kettenschlussregel auf (1) und (8) anwenden. Alternativ zeigt man direkt:

(Ant) aus (1)	Γ	$\neg(\varphi \vee \neg\exists x \neg\psi)$	$(\varphi \vee \neg\exists x \neg\psi)$	(9)
(Vor)	Γ	$\neg(\varphi \vee \neg\exists x \neg\psi)$	$\neg(\varphi \vee \neg\exists x \neg\psi)$	(10)
(Wid) aus (9), (10)	Γ	$\neg(\varphi \vee \neg\exists x \neg\psi)$	φ	(11)
(FU) aus (8), (11)	Γ	ψ		(12)

Aufgabe 5: Da R, S rekursiv aufzählbar sind, gibt es rekursive $P \subseteq \mathbb{N}^3$ und $Q \subseteq \mathbb{N}^3$, so dass für alle $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{N}^2$:

$$\begin{aligned} R(r_1, r_2) \quad & \text{gdw} \quad \exists l\, P(r_1, r_2, l) \text{ und} \\ S(s_1, s_2) \quad & \text{gdw} \quad \exists l\, Q(s_1, s_2, l). \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} & T(k) \\ \text{gdw:} \quad & \exists (r_1, r_2) \in R\, \exists (s_1, s_2) \in S\; k = r_1 \cdot s_1 - r_2 \cdot s_2 \\ \text{gdw:} \quad & \exists r_1, r_2, s_1, s_2\, (\exists l_1\, P(r_1, r_2, l_1) \wedge \exists l_2\, Q(s_1, s_2, l_2) \wedge k = r_1 \cdot s_1 - r_2 \cdot s_2) \\ \text{gdw:} \quad & \exists k\, (\exists r_1, r_2, s_1, s_2, l_1, l_2 \leq k\, (P(r_1, r_2, l_1) \wedge Q(s_1, s_2, l_2) \wedge k = r_1 \cdot s_1 - r_2 \cdot s_2)) \\ & (\text{denn setze einfach } k = \max\{r_1, r_2, s_1, s_2, l_1, l_2\}) \end{aligned}$$

Da beschränkte Quantifizierung, sowie P, Q und Konjunktion rekursiv sind, ist also T rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 6: Ja: Nach dem ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz ist die Theorie N unvollständig (sie ist mit N vereinbar, da sie in $\mathbb{N}$ gilt, und rekursiv). Es gibt also eine Formel φ, so dass weder $N \vdash \varphi$ noch $N \vdash \neg\varphi$. Es gilt aber nur entweder $\mathbb{N} \vDash \varphi$ oder $\mathbb{N} \vDash \neg\varphi$. Sei ohne Einschränkung letzteres der Fall (sonst ersetze φ durch $\neg\varphi$); dann ist $N \cup \{\varphi\}$ eine Theorie, die nicht in $\mathbb{N}$ gilt. Es ist aber $N \cup \{\varphi\}$ widerspruchsfrei, da sonst $N \vdash \neg\varphi$ folgen würde. Außerdem ist $N \cup \{\varphi\}$ rekursiv, da N rekursiv und $\{\varphi\}$ endlich ist. Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz lässt sich also auch auf $N \cup \{\varphi\}$ anwenden und besagt, dass diese Theorie unvollständig ist.