LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. H.-D. Donder
Andreas Fackler

Wintersemester 2011/2012
20. Februar 2012

Logik
Lösungsvorschlag zur Klausur

Aufgabe 1: Beweis per Induktion über den Aufbau des L-Terms t:
(T1) (a): t ist selbst eine Variable. Dann ist die Behauptung erfüllt.
(T1) (b): t ist eine Konstante. Da L keine Konstanten enthält, kann dieser Fall nicht eintreten.
(T2): Ist t von der Form $f(t_1, \dots, t_n)$ mit L-Termen $t_1, \dots, t_n$, so enthält nach der Induktionsvoraussetzung t_1 eine Variable, also enthält auch t eine Variable.

Aufgabe 2: Seien f, g neue einstellige Funktionszeichen. Da φ bereits pränex ist, erhalten wir die Skolemsche Normalform φ^* von φ, indem wir (wie im Beweis von Lemma 8) y durch $f(x)$ und z durch $g(x)$ ersetzen:

$$\forall x(R(x, f(x)) \wedge \neg R(g(x), x))$$

Ein Modell $\mathfrak{A}$ von φ^* erhält man beispielsweise, indem man als Träger von $\mathfrak{A}$ die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen wählt und $R^{\mathfrak{A}}(a, b)$ als $a < b$ definiert. Setze dann etwa $f^{\mathfrak{A}}(a) = a+1$ und $g^{\mathfrak{A}}(a) = a+1$. Tatsächlich gilt dann für alle $a \in \mathbb{Z}$, dass $R^{\mathfrak{A}}(a, a+1)$, und nicht $R^{\mathfrak{A}}(a+1, a)$, also $\mathfrak{A} \vDash \varphi^*$.

Aufgabe 3: Angenommen, φ wäre so eine Formel. Setze $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(a) = \sqrt{2} \cdot a$. Dann ist f bijektiv, linear und monoton, also ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}$. Das heißt aber, dass $\mathfrak{A} \vDash \varphi_x[a]$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \vDash \varphi_x[f(a)]$. Es ist jedoch 1 eine rationale Zahl und $\sqrt{2} = f(1)$ nicht, im Widerspruch zur Annahme, dass φ genau auf die rationalen Zahlen zutrifft.

Aufgabe 4: Wir leiten zunächst $\Gamma\ (\exists x\varphi \to \psi)\ \psi$ her. Man beachte, dass $(\exists x\varphi \to \psi)$ nur eine Abkürzung für $(\neg\exists x\varphi \vee \psi)$ ist.

	$\Gamma\quad (\neg\exists x\varphi \vee \psi)$	(1)
	$\Gamma\quad \varphi$	(2)
(Ant) aus (2)	$\Gamma\quad \neg\exists x\varphi\quad \varphi$	(3)
($\exists$S) aus (3)	$\Gamma\quad \neg\exists x\varphi\quad \exists x\varphi$	(4)
(Vor)	$\Gamma\quad \neg\exists x\varphi\quad \neg\exists x\varphi$	(5)
(Wid) aus (4), (5)	$\Gamma\quad \neg\exists x\varphi\quad \psi$	(6)
(Vor)	$\Gamma\quad \psi\quad \psi$	(7)
($\vee$A) aus (6), (7)	$\Gamma\quad (\neg\exists x\varphi \vee \psi)\quad \psi$	(8)

An dieser Stelle kann man die Kettenschlussregel auf (1) und (8) anwenden. Alternativ zeigt man direkt:

(Ant) aus (1)	Γ	$\neg(\neg\exists x\varphi \vee \psi)$	$(\neg\exists x\varphi \vee \psi)$	(9)
(Vor)	Γ	$\neg(\neg\exists x\varphi \vee \psi)$	$\neg(\neg\exists x\varphi \vee \psi)$	(10)
(Wid) aus (9), (10)	Γ	$\neg(\neg\exists x\varphi \vee \psi)$	ψ	(11)
(FU) aus (8), (11)	Γ	ψ		(12)

Aufgabe 5: Sei $R \subseteq \mathbb{N}^r$ und $S \subseteq \mathbb{N}^s$. Da R, S rekursiv aufzählbar sind, gibt es rekursive $P \subseteq \mathbb{N}^{r+1}$ und $Q \subseteq \mathbb{N}^{s+1}$, so dass für alle $\vec{n} \in \mathbb{N}^r$ und $\vec{m} \in \mathbb{N}^s$:

$$\begin{aligned} R(\vec{n}) \quad &\text{gdw} \quad \exists l\, P(\vec{n}, l) \text{ und} \\ S(\vec{m}) \quad &\text{gdw} \quad \exists l\, Q(\vec{m}, l). \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} & (R \times S)(\vec{n}, \vec{m}) \\ \text{gdw:} \quad & R(\vec{n}) \wedge S(\vec{m}) \\ \text{gdw:} \quad & \exists l_1\, P(\vec{n}, l_1) \wedge \exists l_2\, Q(\vec{m}, l_2) \\ \text{gdw:} \quad & \exists k\, (\exists l_1 \leq k\, P(\vec{n}, l_1) \wedge \exists l_2 \leq k\, Q(\vec{m}, l_2)) \quad \text{(denn setze einfach } k = \max\{l_1, l_2\}) \end{aligned}$$

Da beschränkte Quantifizierung, sowie P, Q und Konjunktion rekursiv sind, ist also $R \times S$ rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 6: Die Struktur $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, <)$ erfüllt die Formel, da

$$S(S(0)) \cdot S(S(0)) = 2 \cdot 2 = 4 = S(S(S(S(0)))).$$

Außerdem erfüllt $\mathfrak{A}$ die Theorie N. Daher ist $T \cup N$ erfüllbar, also widerspruchsfrei. Da T nur ein Element enthält, ist T rekursiv. Damit folgt aus dem ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz, dass die Theorie T unvollständig ist.