Complex Geometry
D. Kotschick

19. April 2010

In dieser Vorlesung geht es um komplexe Mannigfaltigkeiten, insbesondere Kähler Mannigfaltigkeiten, d. h. komplexe Mannigfaltigkeiten mit einer Kähler Metrik. Die wichtigsten Referenzen sind [3, 4]. Wir setzen voraus, dass die Hörer mit den Grundtatsachen über differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Vektorraum-Bündel vertraut sind. Mehr als genug darüber findet sich zum Beispiel in [2].

Definition 1. Eine **komplexe Struktur** auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist ein Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ für M für den alle $\varphi_i(U_i)$ offene Mengen in $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$ sind, und alle Karten-Wechsel $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ holomorph sind.

Eine **komplexe Mannigfaltigkeit** ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit zusammen mit einer komplexen Struktur.

Die Definition komplexer Mannigfaltigkeiten ist ein Spezialfall einer allgemeineren Definition von Mannigfaltigkeiten mit Zusatz-Struktur. Zeichnet man eine geometrische Struktur auf dem Euklidischen Raum aus, hier ist das die übliche komplexe Struktur, so kann man eine entsprechende Klasse von Mannigfaltigkeiten betrachten, die durch Atlanten gegeben sind deren Karten-Wechsel die geometrische Struktur erhalten. Ein anderes geläufiges Beispiel ist das von n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit einer k-dimensionalen Blätterung. In diesem Fall wird $\mathbb{R}^n$ betrachtet als $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, und es wird verlangt dass die Karten-Wechsel die (Durchschnitte mit) Untermannigfaltigkeiten $\mathbb{R}^k \times \{p\} \subset \mathbb{R}^n$ auf ebensolche abbilden. Genauso wie bei der Definition von differenzierbaren Strukturen sollte man bei diesen geometrischen Strukturen immer den maximalen Atlas betrachten der mit einer konkret gegebenen Struktur verträglich ist, oder eine Äquivalenz-Relation auf geometrischen Atlanten definieren so dass zwei (nicht-maximale) Atlanten äquivalent sind wenn ihre Vereinigung wieder ein Atlas ist der die gewünschte Einschränkung an alle Karten-Wechsel erfüllt.

Die Holomorphie-Bedingung an die Karten-Wechsel $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ in Definition 1 lässt sich am einfachsten so ausdrücken, dass man sagt die Differentiale

$$D_p(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})\colon \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

sollen $\mathbb{C}$-linear sein. Da der gegebene Atlas zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit gehört, existieren die Differentiale und sind $\mathbb{R}$-linear. Die Zusatz-Bedingung ist nun die $\mathbb{C}$-Linearität, und diese ist äquivalent dazu dass die Differentiale mit der Multiplikation mit $i = \sqrt{-1}$ kommutieren.

Wir fixieren ein für alle Mal die Identifikation von $\mathbb{C}^m$ mit $\mathbb{R}^{2m}$ so, dass den komplexen Koordinaten $(z_1, \ldots, z_m)$ bezüglich der Standard-Basis die reellen Koordinaten $(x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m)$ entsprechen, mit $x_j = Re(z_j)$ und $y_j = Im(z_j)$. Die Multiplikation mit i ist dann in rellen Koordinaten gegeben durch Multiplikation mit der $(2m) \times (2m)$ Matrix I die auf der Diagonalen m Blöcke der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

und sonst lauter Nullen als Einträge hat. Für eine differenzierbare Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_m)$ zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^{2m}$ ist die Holomorphie-Bedingung $I \circ Df = Df \circ I$ äquivalent zu dem System von Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_i}{\partial y_j} &= -\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_j} \quad \text{für} \quad i \quad \text{ungerade}\,, \\
\frac{\partial f_i}{\partial y_j} &= \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_j} \quad \text{für} \quad i \quad \text{gerade}\,.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Dies sind die **Cauchy–Riemann Gleichungen**. Sie bilden ein sogenanntes elliptisches System von partiellen Differentialgleichungen, und der aus der Funktionentheorie bekannte Spezialfall der Regularitäts-Theorie für elliptische Systeme besagt, dass die Lösungen analytisch sind. Dies ist nichts anderes als die bekannte Aussage dass komplex differenzierbare Funtionen automatisch analytisch sind. In dem Fall der hier von Interesse ist schliessen wir, dass eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer komplexen Struktur automatisch eine verträgliche reell-analytische Struktur hat. Diese ist insbesondere C^∞, auch wenn die differenzierbare Struktur nur als C^k mit endlichem k angenommen war.

Definition 2. Eine differenzierbare Abbildung $f\colon M \longrightarrow N$ zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten ist **holomorph** wenn sie in Karten holomorph ist, d. h. ist φ eine Karten-Abbildung für die komplexe Struktur von M und ψ eine Karten-Abbildung für die komplexe Struktur von N, so ist das Differential von $\psi \circ f \circ \circ\varphi^{-1}$ komplex-linear, wann immer die Komposition existiert.

Diese Definition ist unabhängig von den Karten, da Karten-Wechsel nach Definition 1 holomorph sind.

Die natürliche Äquivalenz-Relation zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten ist die folgende:

Definition 3. Zwei komplexen Mannigfaltigkeiten sind **biholomorph** zu einander wenn es eine bijektive holomorphe Abbildung mit holomorphem Inversem zwischen ihnen gibt.

Beispiele von komplexen Mannigfaltigkeiten sind: offene Mengen von $\mathbb{C}^m$; Riemannsche Flächen, insbesondere die Riemannsche Zahlenkugel S^2; komplex-projektive Räume $\mathbb{C}P^m$; und glatte projektiv-algebraische Varietäten über $\mathbb{C}$, d. h. glatte Nullstellen-Gebilde von homogenen Polynomen im $\mathbb{C}P^m$. Diese und andere Beispiele werden in [1] und [3], jeweils in Kapitel 2, ausführlich besprochen.

21. April 2010

Weitere Beispiele von komplexen Mannigfaltigkeiten sind: komplexe Tori; Hopf Mannigfaltigkeiten diffeomorph zu $S^{2m-1} \times S^1$; und Calabi–Eckmann Mannigfaltigkeiten diffeomorph zu $S^{2k-1} \times S^{2l-1}$.

Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M ist das Tangentialbündel $TM \longrightarrow M$ ein differenzierbares reelles Vektorraum-Bündel. Da die Differentiale der Karten-Wechsel einer komplexen Struktur auf M komplex-linear sind, induziert jede komplexe Struktur auf M auf dem Tangentialbündel die Struktur eines komplexen Vektorraum-Bündels. Wir abstrahieren dies in der folgenden Definition:

Definition 4. Eine **fast-komplexe Struktur** auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist die Struktur eines komplexen Vektorraum-Bündels auf dem Tangentialbündel $TM \longrightarrow M$.

Da die Vektorraum-Bündel Struktur über $\mathbb{R}$ ohnehin gegeben ist, ist eine fast-komplexe Struktur dadurch festgelegt wie die skalare Multiplikation mit $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ auf den Fasern wirkt. Dies ist ein Endomorphismus J des reellen Vektorraum-Bündels TM mit $J^2 = -Id$. (Dies wird oft als $J^2 = -1$ geschrieben.)

Fast-komplexe Strukturen existieren nicht auf allen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Die erste und einfachste Einschränkung ist:

Lemma 1. *Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer fast-komplexen Struktur ist von gerader Dimension und orientiert.*

Statt eine fast-komplexe Struktur zu wählen kann man aus dem Tangentialbündel jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ein komplexes Vektorraum-Bündels konstruieren indem man TM durch seine Komplexifizierung

$$T_{\mathbb{C}}M = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \tag{2}$$

ersetzt. Dies ist per Definition ein komplexes Vektorraum-Bündel über M dessen $\mathbb{C}$-Rang gleich der (reellen) Dimension von M ist. Die Schnitte dieses Bündels heissen **komplexe Vektorfelder** auf M. Real- ind Imaginär-Teil eines solchen komplexen Vektorfeldes sind jeweils Vektorfelder im üblichen Sinne. Alle Operationen auf (gewöhnlichen) Vektorfeldern werden komplex-linear auf komplexe Vektorfelder fortgesetzt.

Hat man nun eine fast-komplexe Struktur J auf M, so macht diese TM zu einem komplexen Vektorraum-Bündel über M vom $\mathbb{C}$-Rang $\frac{1}{2}dim_{\mathbb{R}}M$. Wir setzen J komplex-linear auf $T_{\mathbb{C}}M$ fort. Aus $J^2 = -1$ folgt, dass J die Eigenwerte $\pm i$ hat. Die Eigenräume (genauer: Eigenbündel) geben eine Spaltung als direkte Summe:

$$T_{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M \ , \tag{3}$$

wobei $T^{1,0}M$ der Eigenraum zum Eigenwert $+i$ und $T^{0,1}M$ der zum Eigenwert $-i$ ist.

Damit hat $T_{\mathbb{C}}M$ zwei verschiedene Strukturen als komplexes Vektorraum-Bündel, gegeben durch die komplex-lineare Fortsetzung von J, beziehungsweise durch die Multiplikation mit i in (2). Für beide Strukturen sind $T^{1,0}M$ und $T^{0,1}M$ komplexe Unter-Bündel von $T_{\mathbb{C}}M$. Auf $T^{1,0}M$ stimmen die beiden komplexen Strukturen überein, und auf $T^{0,1}M$ sind sie zueinander konjugiert. Die Komposition

$$TM \xrightarrow{incl} T_{\mathbb{C}}M \xrightarrow{proj} T^{1,0}M$$

von Inklusion und Projektion mit Kern $T^{0,1}M$ ist ein Isomorphismus des komplexen Vektorraum-Bündels (TM, J) auf $(T^{1,0}M, i)$. Sie bildet $v \in TM$ ab auf $\frac{1}{2}(v - iJv)$.

Wir betrachten nun die analoge Komplexifizierung für das Kotangentialbündel T^*M anstatt von TM. Im Allgemeinen gilt per Definition $T^*M = Hom_{\mathbb{R}}(TM, \mathbb{R})$, und für die Komplexifizierung

$$T^*_{\mathbb{C}}M = T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = Hom_{\mathbb{R}}(TM, \mathbb{C}) \ .$$

Die Schnitte dieses Bündels sind komplex-wertige Linearformen auf TM. Wir setzen sie komplex-linear auf $T_{\mathbb{C}}M$ fort.

Hat M eine fast-komplexe Struktur J, so zerlegt sich $Hom_{\mathbb{R}}(TM, \mathbb{C})$ wieder in zwei Untervektorraum-Bündel

$$T^*_{\mathbb{C}}M = \Lambda^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M \ , \tag{4}$$

wobei $\Lambda^{1,0}M$ aus 1-Formen besteht die komplex-linear sind als Abbildungen $(TM, J) \longrightarrow (\mathbb{C}, i)$, und $\Lambda^{0,1}M$ aus 1-Formen besteht die komplex-anti-linear sind. Damit gilt

$$\Lambda^{1,0}M = Hom_{\mathbb{C}}(T^{1,0}M, \mathbb{C}) \ ,$$

und diese Linearformen sind identisch Null auf $T^{0,1}M$. Analog gilt

$$\Lambda^{0,1}M = Hom_{\mathbb{C}}(T^{0,1}M, \mathbb{C}) \; ,$$

und diese Linearformen sind trivial auf $T^{1,0}M$.

Wir betrachten nun die äusseren Potenzen des komplexifizierten Kotangentialbündels. Durch die Zerlegung (4) wird die folgende Zerlegung induziert:

$$\Lambda^k_{\mathbb{C}} T^*_{\mathbb{C}} M = \bigoplus_{p=0}^{k} \left(\Lambda^p_{\mathbb{C}} \Lambda^{1,0} M \otimes \Lambda^{k-p}_{\mathbb{C}} \Lambda^{0,1} M \right) \; .$$

Die Summanden auf der rechten Seite werden abgekürzt zu $\Lambda^{p,k-p}$, so dass obige Zerlegung auch geschrieben wird als

$$\Lambda^k_{\mathbb{C}} T^*_{\mathbb{C}} M = \bigoplus_{p=0}^{k} \Lambda^{p,k-p} = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} \; .$$

Der Raum der differenzierbaren Schnitte von $\Lambda^{p,q}$ wird mit $\mathcal{A}^{p,q}$ bezeichnet. Die äussere Ableitung von komplex-wertigen Funktionen definiert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{0,0} &\xrightarrow{d} \mathcal{A}^{1,0} \oplus \mathcal{A}^{0,1} \\ f &\longmapsto (\partial f, \overline{\partial} f) \; , \end{aligned}$$

wobei $\partial f = (df)^{1,0}$ und $\overline{\partial} f = (df)^{0,1}$ die $(1,0)$- bzw. $(0,1)$-Anteile von df sind. D. h. dass ∂f der komplex-lineare Anteil von df ist, und $\overline{\partial} f$ ist der komplex anti-lineare Anteil. Auf einer komplexen Mannigfaltigkeit sind die holomorphen Funktionen im Sinne von Definition 2 genau die mit $\overline{\partial} f = 0$.

Genauso können wir auch d angewendet auf 1-Formen zerlegen. Betrachten wir zunächst die Einschränkung von d auf Formen vom Typ $(1,0)$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{1,0} &\xrightarrow{d} \mathcal{A}^{2,0} \oplus \mathcal{A}^{1,1} \oplus \mathcal{A}^{0,2} \\ \alpha &\longmapsto (\partial \alpha, \overline{\partial} \alpha, d^{-1,2} \alpha) \; . \end{aligned}$$

Hier ist ∂ wieder der Anteil von d der den ersten Index von $\Lambda^{p,q}$ um Eins erhöht, und den zweiten Index unverändert lässt. Analog ist $\overline{\partial}$ der Anteil von d der den zweiten Index um Eins erhöht, und den ersten unverändert lässt. Anders als bei Funktionen gibt es nun einen weiteren Anteil

$$d^{-1,2}\alpha = (d\alpha)^{0,2} \; .$$

Auf Formen vom Typ $(0,1)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{0,1} &\xrightarrow{d} \mathcal{A}^{2,0} \oplus \mathcal{A}^{1,1} \oplus \mathcal{A}^{0,2} \\ \alpha &\longmapsto (d^{2,-1} \alpha, \partial \alpha, \overline{\partial} \alpha) \; , \end{aligned}$$

mit

$$d^{2,-1}\alpha = (d\alpha)^{2,0} \; .$$

Bemerkung 1. Die Gleichung $d^2 = 0$ auf Funktionen schreibt sich mit dieser Zerlegung wie folgt:

$$\partial^2 + d^{2,-1} \circ \overline{\partial} = 0 \, ,$$
$$\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0 \, ,$$
$$\overline{\partial}^2 + d^{-1,2} \circ \partial = 0 \, .$$

Diese drei Gleichungen entsprechen den drei Anteilen von $d^2 f$ in $\mathcal{A}^{2,0}$, $\mathcal{A}^{1,1}$ bzw. $\mathcal{A}^{0,2}$.

Für Formen vom höheren Grad müssen wir nicht beliebig viele Komponenten von d betrachten:

Lemma 2. *Für jede fast-komplexe Struktur gilt*

$$d(\mathcal{A}^{p,q}) = \mathcal{A}^{p-1,q+2} \oplus \mathcal{A}^{p,q+1} \oplus \mathcal{A}^{p+1,q} \oplus \mathcal{A}^{p+2,q-1} \, .$$

Beweis. Als Algebra wird die äussere Algebra erzeugt von $\Lambda^{0,0}$, $\Lambda^{1,0}$ und $\Lambda^{0,1}$. Unsere obige Diskussion zeigt, dass jeder der Grade p und q unter d um maximal 1 verkleinert wird. Da der totale Grad $p + q$ sich um 1 erhöht, folgt die Behauptung. $\square$

Definition 5. Der **Nijenhuis Tensor** einer fast-komplexen Struktur J ist definiert durch

$$N(X, Y) = 2([JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y])$$

für komplexe Vektrofelder X und Y.

Dass dies ein Tensor ist, zeigt die folgende Übung:

Übung 1 (Blatt 1, Nr. 2). Beweise, dass N schief-symmetrisch und bilinear über den Funktionen auf M ist.

26. April 2010

Das Verschwinden des Nijenhuis-Tensors hat folgende äquivalente Formulierungen:

Proposition 1. *Die folgen Aussagen für eine fast-komplexe Struktur J sind äquivalent:*

(a) *das Unter-Bündel $T^{1,0}M \subset T_{\mathbb{C}}M$ ist abgeschlossen unter Kommutator-Bildung;*
(b) *das Unter-Bündel $T^{0,1}M \subset T_{\mathbb{C}}M$ ist abgeschlossen unter Kommutator-Bildung;*
(c) *es gilt $d(\mathcal{A}^{1,0}) \subset \mathcal{A}^{2,0} \oplus \mathcal{A}^{1,1}$;*
(d) *es gilt $d(\mathcal{A}^{0,1}) \subset \mathcal{A}^{0,2} \oplus \mathcal{A}^{1,1}$;*
(e) *es gilt $d(\mathcal{A}^{p,q}) \subset \mathcal{A}^{p+1,q} \oplus \mathcal{A}^{p,q+1}$ für alle p und q;*
(f) *der Nijenhuis Tensor N von J verschwindet identisch.*

Beweis. Die Äquivalenz von (a) und (b), bzw. von (c) und (d) ergibt sich durch komplexe Konjugation. Offensichtlich sind (c) und (d) Spezialfälle von (e). Die Umkehrung, dass (e) aus (c) und (d) folgt, ergibt sich wie im Beweis von Lemma 2.

Sei nun $\alpha \in \mathcal{A}^{1,0}$. Für $X, Y \in T^{0,1}M$ gilt

$$(d\alpha)(X, Y) = L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = -\alpha([X, Y]) \, , \tag{5}$$

da die Funktionen $\alpha(X)$ und $\alpha(Y)$ identisch verschwinden weil α auf $T^{0,1}M$ Null ist. Aus (b) folgt $[X, Y] \in T^{0,1}M$, so dass die rechte Seite Null ist. Dies bedeutet, dass der $(0, 2)$-Anteil von $d\alpha$ verschwindet. Ganz analog folgt aus (a) dass der $(2, 0)$-Anteil einer Eins-Form vom Typ $(0, 1)$ verschwindet. Also folgen (c) und (d) aus (a) und (b). Nehmen wir umgekehrt an, dass (c) gilt, so verschwindet die linke Seite von (5), also ist $\alpha([X,Y]) = 0$ für alle Eins-Formen α vom Typ $(1,0)$. Dies bedeutet, dass $[X,Y]$ vom Typ $(0,1)$ ist, also gilt (b). Genauso schliessen wir (a) aus (d).

Damit ist gezeigt, dass (a), (b), (c), (d) und (e) zueinander äquivalent sind. Um die Äquivalenz mit (f) zu zeigen benutzen wir die folgende Aussage:

Übung 2 (Blatt 1, Nr. 3). Es gilt:

$$N(X,Y) = -8[X^{1,0}, Y^{1,0}]^{0,1} - 8[X^{0,1}, Y^{0,1}]^{1,0} ,$$

wobei $X^{p,q}$ die (p,q)-Komponente von X aufgefasst als komplexes Vektorfeld ist.

Ist N identisch Null, so zeigt diese Formel, dass $T^{1,0}M$ und $T^{0,1}M$ abgeschlossen unter Kommutator-Bildung sind. Gilt umgekehrt dass diese Bündel abgeschlossen unter Kommutator-Bildung sind, so zeigt die Formel dass N verschwindet. Also sind (a) und (b) äquivalent zu (f). $\square$

Ist M eine komplexe Mannigfaltigkeit, so trägt sie eine tautologische fast-komplexe Struktur die definiert ist durch $J(X) = i \cdot X$.

Lemma 3. *Die fast-komplexe Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit erfüllt die Bedingungen (a)-(f) aus der Proposition.*

Die Umkehrung dieser Aussage gilt auch, dies ist der folgende schwierige Satz über partielle Differentialgleichungen:

Satz 1 (Satz von Newlander–Nirenberg)**.** *Erfüllt eine fast-komplexe Struktur J auf M eine, und damit alle, der Bedingungen (a)-(f), so ist M eine komplexe Mannigfaltigkeit und J gegeben durch skalare Multiplikation mit i.*

Man sagt, dass eine fast-komplexe Struktur integrabel ist, wenn sie die Bedingungen (a)-(f) erfüllt. Der Satz besagt, dass eine integrable fast-komplexe Struktur immer von einer komplexen Mannigfaltigkeits-Struktur induziert wird.

Als Bespiele diskutieren wir nun Flächen.

Lemma 4. *Jede fast-komplexe Struktur auf einer Fläche ist integrabel.*

Jede fast-komplexe Struktur induziert eine Orientierung. Für Flächen gilt die folgende Umkehrung:

Lemma 5. *Jede orientierte Fläche hat eine fast-komplexe Struktur die die Orientierung induziert. Fast-komplexe Strukturen auf orientierten Flächen korrespondieren bijektiv zu konformen Äquivalenz-Klassen von Riemannschen Metriken.*

Kehrt man die Orientierung um, so geht man zu den komplex-konjugierten Strukturen über.

Literatur

1. W. Ballmann, *Lectures on Kähler Manifolds*, European Mathematical Society 2006.
2. L. Conlon, *Differentiable Manifolds — A First Course*, Birkhäuser Verlag 1993.
3. D. Huybrechts, *Complex Geometry*, Springer Verlag 2005.
4. C. Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry, I*, Cambridge University Press 2002.