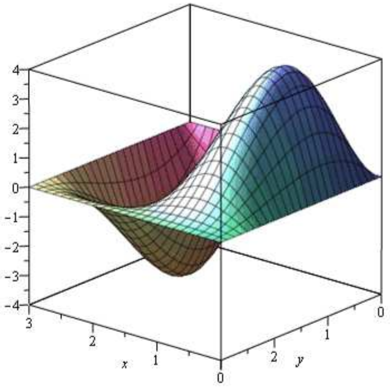
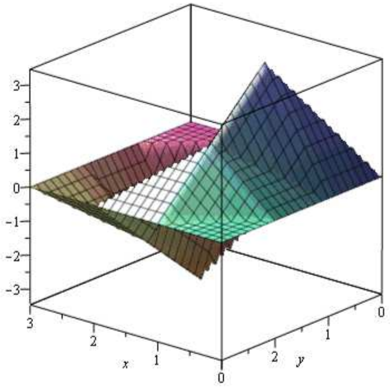
LMU München, Germany • Thomas Schöps

Lagrange-Projektion

Hüttenseminar im Zillertal bei
Prof. Lars Diening
Wintersemester 2014/2015

Idee der Präsentation





Definition

Für normierte Räume X und Y gilt:

$$L(X,Y) := \{A : X \to Y |\text{ A ist stetig und linear}\}$$
$$||A|| := \|A\|_{L(X,Y)} = sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{||Ax||_Y}{||x||_X}$$

Für normierte Räume X,Y bedeutet

$$X \hookrightarrow Y,$$

dass X in Y linear und stetig eingebettet ist.

Lagrange-Projektion

Folgerung 3.28

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes konvexes Gebiet, $k, m \in \mathbb{N}_0, p, q \geq 1$, sowie

$$E, I \in L(H^{k+1,p}(G), H^{m,q}(G))$$

I ist der Interpolations- Operator, der $\mathbb{P}_k(G)$ invariant lässt:
$Is = s(s \in \mathbb{P}_k(G))$
$\Longrightarrow \exists\ c$, sodass $\forall u \in H^{k+1,p}(G)$ gilt:

$$||Eu - Iu||_{H^{m,q}(G)} \leq c|u|_{H^{k+1,p}(G)}$$

wichtiger Hilfssatz

Sei T ein n-Simplex, $k \in \mathbb{N}$. $\forall p \in \mathbb{P}_k(T)$ mit $i = (i_0, .., i_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$, $\frac{i}{k} = (\frac{i_0}{k}, ..., \frac{i_n}{k})$ gilt:

$$p(x(\lambda)) = \bar{p}(\lambda) = \sum_{|i|=k} \bar{p}(\frac{i}{k})\phi_i(\lambda) \quad \text{und}$$

$$\phi_i(\lambda) = \prod_{l=0}^{n} \prod_{j_l=0}^{i_l-1} \frac{\lambda_l - \frac{j_l}{k}}{\frac{i_l}{k} - \frac{j_l}{k}}$$

$\Longrightarrow p \in \mathbb{P}_k(T)$ ist eindeutig durch seine Werte auf dem Lagrange- Gitter k-ter Ordnung bestimmt.

$$\mathbb{G}_k(T) = \{x = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j a_j | \lambda_j \in \{\frac{m}{k} | m = 0, ..., k\}, \lambda_j \geq 0; \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1\}$$

Lagrange-Projektion

$\Longrightarrow$ G_1, G_2 sind **affin äquivalent** wenn:
$\exists$ invertierbare affine Abbildung $x = F(y) = Ay + b (x, y \in \mathbb{R}^n)$,
sodass $G_1 = F(G_2)$ ist

Satz 3.29

Seien $G_1, G_2 \in \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und affin äquivalent, $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty]$. Dann gelten für $u \in H^{m,p}(G_1)$ und $v(y) = u(F(y)), (y \in G_2)$ die Abschätzungen

$$|v|_{H^{m,p}(G_2)} \leq c_1 |A|^m |detA|^{-\frac{1}{p}} |u|_{H^{m,p}(G_1)}$$
$$|u|_{H^{m,p}(G_1)} \leq c_2 |A^{-1}|^m |detA|^{\frac{1}{p}} |v|_{H^{m,p}(G_2)}$$

Beweisskizze von Satz 3.29

- o.B.d.A $u \in C^m(G_1) \cap H^{m,p}(G_1), v \in C^m(G_2) \cap H^{m,p}(G_2)$
- $v_{y_j}(y) = \sum_{i=1}^n u_{x_i}(F(y))A_{ij}$
- durch vollst. Induktion für $|\alpha| = m$:
  $|D^\alpha v(y)| \leq \ldots \leq c(m,n)|A|^m \sum_{|\beta|=m} |(D^\beta u) \circ F|_{L^p(G_2)}$
- durch Integration und die Transformationsformel für $p < \infty$ gilt:
  $||D^\alpha v||_{L^p(G_2)} \leq c(m,n)|A|^m \sum_{|\beta|=m} ||(D^\beta u) \circ F||_{L^p(G_2)}$
- $||(D^\beta u) \circ F||_{L^p(G_2)} = (\int_{G_1} |(D^\beta u)(x)|^p |detA^{-1}| dx)^{\frac{1}{p}}$
  $= |detA|^{-\frac{1}{p}} ||D^\beta u||_{L^p(G_1)}$

  $\implies$ Zusammen folgt der Satz.

  $\implies$ Für die zweite Abschätzung ersetze A durch A^{-1}

Rückblick und Folgerung 3.30

- s-dim Simplex: $T = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j a_j, 0 \leq \lambda_j, \sum_{j=0}^{s} \lambda_j = 1\}$
- Durchmesser: $h(T) = \max\{|a_j - a_k| | (j, k = 0, ..., s)\}$
- Inkugeldurchmesser: $\rho(T) = 2sup\{R | B_R(x_0) \subset T\}$

Folgerung 3.30

Unter den Vorraussetzungen des letzten Satzes für

$$\bar{u}(\bar{x}) = u(F(\bar{x})) \qquad (\bar{x} \in T_0)$$

gelten die Abschätzungen

$$|\bar{u}|_{H^{m,p}(T_0)} \leq c_1(m, n, p) \frac{h(T)^m}{\rho(T_0)^m} \rho(T)^{-\frac{n}{p}} |u|_{H^{m,p}(T)} \quad \text{und}$$

$$|u|_{H^{m,p}(T)} \leq c_2(m, n, p) \frac{h(T_0)^m}{\rho(T)^m} h(T)^{\frac{n}{p}} |\bar{u}|_{H^{m,p}(T_0)}$$

Satz 3.31

Sind $k, m \in \mathbb{N}_0$, $p, q \geq 1$ so, dass die Einbettung

$$H^{k+1,p}(T_0) \hookrightarrow H^{m,q}(T_0)$$

besteht und sind $I_0, I \in L(H^{k+1,p}(T_0), H^{m,q}(T_0))$ Interpolationsoperatoren. So folgt für

$$(Iu) \circ F = I_0(u \circ F)$$

die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |u - Iu|_{H^{m,q}(T)} &\leq c\sigma(T)^m |T|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} h(T)^{k+1-m} |u|_{H^{k+1,p}(T)} \\ &\leq c\sigma(T)^{m-n\min\{0,\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\}} h(T)^{k+1-m+n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} |u|_{H^{k+1,p}(T)} \end{aligned}$$

Beweisskizze von Satz 3.31

- Existenz des Interpolationsoperator I auf T ist klar
- Mit $u \in H^{k+1,p}(T)$ und Satz 3.29:
  $|u - Iu|_{H^{m,q}(T)} \leq c|A^{-1}|^m |detA|^{\frac{1}{q}} |(u - Iu) \circ F|_{H^{m,q}(T_0)}$
- Nach Def. von I, mit $s_0 \in \mathbb{P}_k(T_0)$ und der Einbettungskonstanten $||E_0||$ folgt:
  $... \leq c|A^{-1}|^m |detA|^{\frac{1}{q}} (||E_0|| + ||I_0||)|s_0 - u \circ F|_{H^{k+1,p}(T_0)}$
- Nach Rücktransformation gemäß Satz 3.29 und dem Hilfssatz gilt:
  $... \leq c\rho(T)^{-m} h(T)^{k+1} |T|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} |u|_{H^{k+1,p}(T_0)}$
- Mit $c\rho(T)^n \leq |detA| \leq ch(T)^n$ und $\sigma(T) = \frac{h(T)}{\rho(T)}$ folgt:
  $\Longrightarrow ... \leq c\rho(T)^{-m} h(T)^{k+1+n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} |u|_{H^{k+1,p}(T)}$ falls $p \geq q$
  $\Longrightarrow ... \leq c\rho(T)^{n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) - m} h(T)^{k+1} |u|_{H^{k+1,p}(T)}$ falls $p \leq q$
  $\Longrightarrow$ Zusammen folgt der Satz

Lagrange-Projektion

Satz 3.33

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und durch $\mathscr{T}$ zulässig trianguliert. Weiter sei

$$X_h = \{u_h \in C^0(\bar{G}) | u_h|_T \in \mathbb{P}_k(T), T \in \mathscr{T}\}.$$

Für den Lagrange-Interpolationsoperator

$$Iu \in \mathbb{P}_k(T), \quad Iu = u \quad \text{auf } \mathbb{G}_k(T), \quad T \in \mathscr{T},$$

für den Fall $H^{2,p}(G) \hookrightarrow C^0(\bar{G})$ gilt die Interpolationsabschätzung:

$$|u - Iu|_{H^{m,p}(G)} \leq c_1 \sigma^m h^{s+1-m} |u|_{H^{s+1,p}(G)} \quad \text{für } m \in \{0, 1\}$$

für den Fall $H^{1,p}(G) \hookrightarrow C^0(\bar{G})$ gilt:

$$|u - Iu|_{H^{m,p}(G)} \leq c_2 \sigma^m h^{1-m} |u|_{H^{1,p}(G)} \quad \text{für } m \in \{0, 1\}$$

Beweisskizze von Satz 3.33

- Existenz des Interpolationsoperators I: Mit einem Hilfssatz und der Einbettung $H^{2,p}(G) \hookrightarrow C^0(\bar{G})$, denn wegen der Einbettung ist die punktweise Interpolierende wohldefiniert,
  $Iu(x) = \sum_{j=1}^{\bar{m}} u(\bar{a}_j)\phi_j(x)$ und invariant auf $\mathbb{P}_k(T)$ für $T \in \mathscr{T}$
- Interpolationsabschätzung:
  $|u - Iu|^p_{H^{m,p}(G)} = \sum_{T \in \mathscr{T}} |u - Iu|^p_{H^{m,p}(T)}$, (weiter mit Satz 3.31)
  $\leq c \sum_{T \in \mathscr{T}} \sigma(T)^{mp} h(T)^{(s+1-m)p} |u|^p_{H^{s+1,p}(T)}$
  $\leq c\sigma^{mp} h^{(s+1-m)p} |u|^p_{H^{s+1,p}(G)}$
- zweiter Fall geht wegen $q > n$ und damit $H^{1,q}(G) \hookrightarrow C^0(\bar{G})$ analog

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!!