Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 10.11.2014

Maß- und Integralrechnung

Tutoriumsblatt 5

Aufgabe 1:
Finden Sie je ein Beispiel für

(a) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in $\mathcal{L}^1([0,1])$ mit
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0,$$
so dass
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$
nirgends konvergiert.

(b) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in $\mathcal{L}^1([0,1])$ mit
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \infty,$$
so dass
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$
fast überall.

Aufgabe 2:
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ λ^n-messbar mit positivem Maß $\lambda^n(B) > 0$. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ messbar und $f > 0$ fast überall. Zeigen Sie, dass $\int_B f\, d\lambda^n > 0$.

Aufgabe 3:
Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ mit $\lambda^d(K) < \infty <$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen die auf K gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiere. Zeigen, dass f integrierbar ist und
$$\lim_{n\to\infty} \int_K f_n \mathrm{d}\lambda^d = \int_K f \mathrm{d}\lambda^d.$$