Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 20.10.2014

# Maß- und Integralrechnung

## Tutoriumsblatt 2

**Aufgabe 1:**
Sei $I$ eine Indexmenge, $\mathcal{R}$ ein $\sigma$-Ring, $\mu$ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$ und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen aus $\mathcal{R}$. Zeigen Sie:

(a) $\mu\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \leq \inf_{i\in I} \mu(A_i)$

(b) Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen aus $\mathcal{R}$. Zeigen Sie:

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(Man nennt diese Eigenschaft: Folgen-Unterhalbstetigkeit von $\mu$.)

**Aufgabe 2:**
Sei $\mathcal{E} := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ und $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty[$,

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & \text{für } A = \{x\}, \\ 0 & \text{für } A = \emptyset. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\mathcal{E}$ ein Halbring und $\mu$ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{E}$. Für $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sei

$$\mu^*(Q) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : A_i \in \mathcal{E}, Q \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}.$$

(a) Sei $Q$ überabzählbar. Berechnen Sie $\mu^*(Q)$.

(b) Sei $Q$ abzählbar unendlich. Berechnen Sie $\mu^*(Q)$.

(c) Sei $Q$ endlich. Berechnen Sie $\mu^*(Q)$.

(d) Geben Sie $\mathcal{A}_{\mu^*}$ an.

**Aufgabe 3:**
Sei $\eta$ ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{A}_\eta$ die von $\eta$ induzierte $\sigma$-Algebra. Zeigen Sie für $A \in \mathcal{A}_\eta$:

$$\eta(A) = 0 \Rightarrow \forall\, Q \in \mathcal{P}(X) : \eta(Q) = \eta(A^{\complement} \cap Q)$$