LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi

Wintersemester 2014/15
18.3.2015

Maß- und Integrationstheorie mehrerer Variablen

Nachklausur

Nachname: ____________ Vorname: ____________

Matrikelnr.: ____________ Fachsemester: ____________

Abschluss: Bachelor, PO ❑ 2007 ❑ 2010 ❑ 2011 Master, PO ❑ 2010 ❑ 2011

Lehramt Gymnasium: ❑ modularisiert ❑ nicht modularisiert

❑ Diplom ❑ Anderes: ____________

Hauptfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch. Es ist erlaubt, eine selbst erstellte, beidseitig per Hand beschriebene A4-Seite in der Klausur zu benutzen sowie einen nicht-programmierbaren Taschenrechner. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, vermerken Sie dies am unteren Ende des Angabenblattes der entsprechenden Aufgabe und schreiben den Rest auf die Rückseite oder auf eine von uns ausgehändigte leere Seite (hinten an der Klausur hängen schon zwei leere Seiten). Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Da wir keine Aushänge mit Namen oder Matrikelnummern machen dürfen, notieren Sie sich bitte die nebenstehende Zahl, unter der wir Ihr Klausurergebnis veröffentlichen werden.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
max. Punkte	**2,5**	**3,5**	**2**	**6**	**4,5**	**4**
Punkte						

Σ Gesamt (max. 22,5)	

Viel Erfolg !

Name: ____________________

Aufgabe 1 **(2,5) Punkte**

Zeigen Sie, dass für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|f\|_2^2 = \int_0^\infty 2\,t\lambda^n(\{|f| > t\})\,dt,$$

wobei λ^n das n-dimensionale Lebesguemaß ist.
Begründen Sie Ihre Schritte.

Lösung zu Aufgabe 1

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} [t^2]_{t=0}^{t=|f(x)|}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(x)|} 2t\,dt\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty 2t\chi_{\{|f(x)|>t\}}(t,x)\,dt\,dx \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} 2t\chi_{\{|f(x)|>t\}}(t,x)\,dx\,dt \qquad \text{Fubini} \\
&= \int_0^\infty 2t\lambda^n(\{|f(x)| > t\})\,dt.
\end{aligned}$$

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

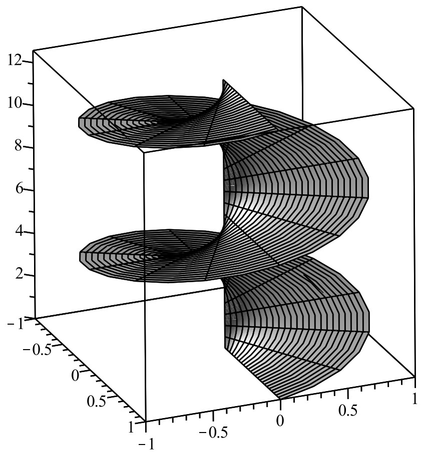
Name: ____________________

Aufgabe 2 **(3,5) Punkte**

Wir betrachten die durch

$$\Phi\ : (0,1) \times (0,4\pi) \to \mathbb{R}^3,$$
$$(r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \varphi. \end{pmatrix}$$

parametrisierte Helikoide. Bestimmen Sie den Flächeninhalt.



Lösung zu Aufgabe 2
Es gilt

$$(\partial_r\Phi)(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (\partial_\varphi\Phi)(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 1. \end{pmatrix}$$

Damit folgt

$$g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} (\partial_r\Phi)(\partial_r\Phi) & (\partial_r\Phi)(\partial_\varphi\Phi) \\ (\partial_\varphi\Phi)(\partial_r\Phi) & (\partial_\varphi\Phi)(\partial_\varphi\Phi) \end{pmatrix}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (r^2+1) \end{pmatrix}.$$

Damit können wir die Fläche berechnen durch

$$\begin{aligned}
\int_{\Phi(U)} do(r,\varphi) &= \int_U \sqrt{\det(g(r,\varphi))}\, d(r,\varphi) \\
&= \int_0^1 \int_0^{4\pi} \sqrt{r^2+1}\, d\varphi,\ dr \\
&= 4\pi \int_0^1 \sqrt{r^2+1}\, dr \\
&= 4\pi \big[\frac{1}{2} r\sqrt{r^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(r)\big]_0^1 \\
&= 4\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1)\right)
\end{aligned}$$

Das letzte Integral kann mit Substitution sinh oder mit partieller Integration hergeleitet werden!

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 3 **(2) Punkte**

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei σ-Algebren über X und sei $f : X \to Y$. Zeigen oder wiederlegen Sie:

(a) $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ist eine σ-Algebra über X.

(b) $f(\mathcal{A}) := \{f(B) : B \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra über Y.

Lösung zu Aufgabe 3

Nur Antworten mit Begündungen geben Punkte.

(a) Nein. Sei zum Beispiel $X := \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{A}_1 := \big\{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$ und $\mathcal{A}_2 := \big\{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$. Dann sind $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ σ-Algebren. Es gilt $\{1\}, \{2\} \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Aber $\{1, 2\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

(b) Nein. Sei zum Beispiel $X := Y := \mathbb{R}$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$ und $f(x) := 1$. Dann ist $f(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{1\}\}$. Dies ist keine σ-Algebra, da $\mathbb{R} = \emptyset^{\complement} \notin f(\mathcal{A})$.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 4 **(4,5+1,5) Punkte**

Betrachten Sie das von $\alpha \geq 0$ abhängige Integral

$$J(\alpha) := \int_0^\infty \frac{1-\cos(\alpha x)}{x} e^{-x}\, dx.$$

(a) Zeigen Sie, dass J differenzierbar auf $[0,\infty)$ ist und berechnen Sie $J'(\alpha)$.
(Es kommt eine relativ einfacher Bruch für $J'(\alpha)$ heraus.)

(b) Bestimmen Sie nun $J(\alpha)$ mittels Teil (a).

Lösung zu Aufgabe 4

Sei

$$g(\alpha, x) := \frac{1-\cos(\alpha x)}{x} e^{-x}$$

für alle $\alpha \geq 0$ und $x > 0$.

(a) Offensichtlich ist $g(\alpha, x)$ nach α differenzierbar für $x > 0$ und

$$(\partial_\alpha g)(\alpha, x) = \sin(\alpha x) e^{-x} \qquad .$$

Damit ist $J(\alpha)$ als Parameterintegral differenzierbar, wenn wir eine von $\alpha \to \alpha_0$ unabhängige Majorante von $(\partial_\alpha g)(\alpha, x)$ finden

Es gilt

$$|(\partial_\alpha g)(\alpha, x)| \leq e^{-x} \in L^1((0,\infty)).$$

Also ist J differenzierbar und es gilt

$$J'(\alpha) = \int_0^\infty (\partial_\alpha g)(\alpha, x)\, dx = \int_0^\infty \sin(\alpha x) e^{-x}\, dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
J'(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i} e^{-x}\, dx \\
&= \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{(i\alpha-1)x} - e^{(-i\alpha-1)x}\, dx \\
&= \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{(i\alpha-1)x}}{i\alpha - 1} - \frac{e^{(-i\alpha-1)x}}{-i\alpha-1} \right]_{x=0}^{x=\infty} \\
&= \frac{1}{2i} \left(-\frac{1}{i\alpha-1} + \frac{1}{-i\alpha-1} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \frac{i\alpha + 1 + i\alpha - 1}{(i\alpha-1)(-i\alpha-1)} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha^2+1}.
\end{aligned}$$

(b) Da J stetig ist, gilt nach dem Hauptsatz

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \int_0^\alpha J'(t)\,dt + J(0) \\ &= \int_0^\alpha J'(t)\,dt \qquad \text{da } J(0) = 0 \\ &= \int_0^\alpha \frac{t}{t^2+1}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^\alpha \\ &= \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+1). \qquad . \end{aligned}$$

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

(Extrablatt für Augabe 4)

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 5 **(2+2,5) Punkte**

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t$.

(a) Berechnen Sie die Fourierreihe von f in der Form $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$.

(b) Bestimmen Sie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$ und folgern Sie hieraus den Wert von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Lösung zu Aufgabe 5

(a) Wir berechnen für $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt.$$

Dies ergibt

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t\, dt = 0$$

und für $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-ikt}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[t \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikt}}{-ik}\, dt \right) && \text{partielle Integration} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[t \frac{e^{-ikt}}{-ik} - \frac{e^{-ikt}}{(-ik)^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi}{ik} (-1)^k \\
&= -\frac{\sqrt{2\pi}}{ik} (-1)^k.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus 0} \frac{2\pi}{k^2} = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Da $f \mapsto (c_k)_k$ eine Isometrie von $L^2((-\pi,\pi))$ nach $\ell^2(\mathbb{Z})$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 &= \|f\|^2_{L^2((-\pi,\pi))} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt \\
&= \frac{2}{3}\pi^3.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{6}\pi^2.$$

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

(Extrablatt für Augabe 5)

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 6 **(3+1) Punkte**

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (glatte Funktionen mit kompakten Träger), wobei φ nicht die Nullfunktion ist. Für $\varepsilon > 0$ definiere $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$.

(a) Bestimmen Sie $\|\varphi_\varepsilon\|_p$ in Abhängigkeit von ε und $\|\varphi\|_p$ mit $p \in [1, \infty]$.

(b) Bestimmen Sie $\lim_{\varepsilon\to 0} \|\varphi_\varepsilon\|_2$ und $\lim_{\varepsilon\to\infty} \|\varphi_\varepsilon\|_2$.

Lösung zu Aufgabe 6

(a) Da φ_ε und φ stetig gilt

$$\|\varphi_\varepsilon\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi_\varepsilon(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n}|\varphi_\varepsilon(x/\varepsilon)| = \varepsilon^{-n}\|\varphi\|_\infty. \qquad .$$

Für $1 \leq p < \infty$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\varepsilon\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\varepsilon(x)|^p \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)\right|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\varepsilon^{-n}\varphi(y)\right|^p \varepsilon^n \, dx \qquad \text{Substitution } y = x/\varepsilon \text{ also } dx = \varepsilon^n dy \\
&= \varepsilon^{n(1-p)} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^p \, dx \\
&= \varepsilon^{n(1-p)} \|\varphi\|_p^p.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\|\varphi_\varepsilon\|_p = \varepsilon^{n\frac{1-p}{p}} \|\varphi\|_p.$$

(b) Es folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \|\varphi_\varepsilon\|_2 &= \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \|\varphi\|_2 = \infty, \\
\lim_{\varepsilon\to\infty} \|\varphi_\varepsilon\|_2 &= \lim_{\varepsilon\to\infty} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \|\varphi\|_2 = 0.
\end{aligned}$$

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

(Extrablatt)

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

(Extrablatt)

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.