Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 10.11.2014

Maß- und Integralrechnung

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: **5+4 Punkte**

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d, \lambda^d)$.

(a) Nach der Vorlesung wissen Sie, dass aus $\int_A f\, d\lambda^d = 0$ für alle $A \in \mathcal{L}^d$ (oder alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) schon $f = 0$ fast überall folgt. Zeigen Sie folgende stärkere Aussage:

Gilt $\int_{[a,b]} f\, d\lambda^d = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a \leq b$, so folgt $f = 0$ fast überall.

Tipp: Zeigen Sie, dass das System der messbaren Mengen für die $\int_A f\, d\lambda^d = 0$ gilt eine σ-Algebra ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $\int_X fg\, d\lambda^d = 0$ für alle stetigen Funktionen $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger (d.h. $\operatorname{supp} g := \overline{\{g \neq 0\}}$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^d$), so ist $f = 0$ fast überall.

Tipp: Benutzen Sie (a).

Aufgabe 2: **2+1+2+1 Punkte**

Die Funktionen $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ seien messbar und f integrierbar.

(a) Ist $f_n \geq f$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

(b) Ist $f_n \leq f$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

(c) Zeigen Sie, dass man auf $f_n \geq f$ bzw. $f_n \leq f$ in Teil (a) bzw. (b) nicht verzichten kann.

(d) Zeigen Sie, dass man im Satz der majorisierten Konvergenz nicht auf die Integrierbarkeit der Majorante verzichten kann.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen auf E, die fast überall auf E punktweise gegen f konvergiert. Desweiteren sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von auf E integrierbaren Funktionen, die fast überall auf E punktweise gegen g konvergiert. Ferner gelte $|f_n| \leq g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n = \int_E g \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

Abgabe bis Montag, den 17.11.2014 um 10:15 Uhr