Finite Elemente am Beispiel der Poissongleichung

Roland Tomasi

11.12.2013

Inhalt

Poissongleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit abschnittsweise glattem Rand $\partial\Omega$ und $f \in L^2(\Omega)$. Wir suchen $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Physikalische Interpretationen (z.B.):

- f Wärmequelle, u Temperaturverteilung im Gleichgewicht
- f Kraft, u Membran im Gleichgewicht (potentielle Energie ist minimal!)

Lösung als Energieminimierer

Die Lösung $u \in W_0^{1,2}\left(\overline{\Omega}\right)$ des Poissonproblems ist der Minimierer des Energiefunktionals

$$\begin{aligned} J[v] &:= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(\mathbf{x})|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega f(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - \langle f, v\rangle \end{aligned}$$

über $W_0^{1,2}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Lemma

Sei $R \in C\left(\overline{\Omega}\right)$.

$$\forall \varphi \in C\left(\overline{\Omega}\right) : \int_{\Omega} R\left(\mathbf{x}\right) \varphi\left(\mathbf{x}\right) \mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$R\left(\mathbf{x}\right) \equiv 0$$

Dieses Lemma lässt sich auf $R, \varphi \in W_0^{1,2}\left(\overline{\Omega}\right)$ übertragen.

Schwache Formulierung

Definiere das *Residuum*

$$R\left[u\right] := -\Delta u - f\,.$$

$\Rightarrow$ Poissongleichung wird zu

$$\begin{aligned} & R\left[u\right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall \varphi \in W_0^{1,2}\left(\overline{\Omega}\right) : \int_\Omega R\left[u\right] \varphi \,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall \varphi \in W_0^{1,2}\left(\overline{\Omega}\right) : \int_\Omega \left(\nabla u\right) \cdot \left(\nabla \varphi\right) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f \varphi \,\mathrm{d}\mathbf{x} \end{aligned}$$

(*schwache Formulierung* des Poissonproblems)

Galerkin-Verfahren

Galerkin-Verfahren: Betrachte endlichdimensionalen Unterraum

$$V \subset W_0^{1,2},$$

d.h. suche $v \in V$ mit

$$\forall \varphi \in V : \int_\Omega (\nabla v) \cdot (\nabla \varphi) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Man hofft mit v eine gute Approximation von u zu erhalten.

Galerkin-Orthogonalität

Für $w \in V \subset W_0^{1,2}\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \nabla (u - v), \nabla w \rangle &= \langle \nabla u, \nabla w \rangle - \langle \nabla v, \nabla w \rangle \\
&= \int_\Omega (\nabla u) \cdot (\nabla w) \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega (\nabla v) \cdot (\nabla w) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega f \, w \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega f \, w \, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0.
\end{aligned}$$

In diesem Sinne ist der Fehler orthogonal zum Unterraum V.

Céa's Lemma

Lemma

Die approximierte Lösung v ist bzgl. der Energienorm optimal:

$$\|\nabla (v-u)\| = \min_{w\in V} \|\nabla (w-u)\|$$

Beweis

Mittels Galerkin-Orthogonalität und Cauchy-Schwarz erhält man

$$\begin{aligned}
\|\nabla (v-u)\|^2 &= \langle \nabla (v-u), \nabla (v-u)\rangle \\
&= \langle \nabla (v-u), \nabla (v-w)\rangle + \langle \nabla (v-u), \nabla (w-u)\rangle \\
&= \langle \nabla (v-u), \nabla (w-u)\rangle \\
&\leq \|\nabla (v-u)\| \|\nabla (w-u)\|
\end{aligned}$$

□

Diskretisierung I

Sei $\{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Basis von V:

$$\forall \varphi \in V : \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle = \int_\Omega f \, \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall 1 \leq j \leq m : \langle \nabla v, \nabla b_j \rangle = \int_\Omega f \, b_j \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

(System von $m = \dim V$ Gleichungen)

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} v_i b_i(\mathbf{x})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} v_i \langle \nabla b_i, \nabla b_j \rangle = \int_\Omega f \, b_j \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Diskretisierung II

Bei Galerkin-Verfahren wird also Lösung von

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

gesucht, wobei

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} := \begin{pmatrix} \langle f, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, b_m \rangle \end{pmatrix},$$

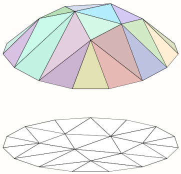
$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \langle \nabla b_1, \nabla b_1 \rangle & \dots & \langle \nabla b_m, \nabla b_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \nabla b_1, \nabla b_m \rangle & \dots & \langle \nabla b_m, \nabla b_m \rangle \end{pmatrix}.$$

Finite Elemente

Es gibt viele Arten V zu wählen. Gute Wahl würde beinhalten:

- einfache Basisfunktionen $\{b_1, \ldots, b_m\}$
- **A** dünn besetzt, d.h. $\langle \nabla b_i, \nabla b_j \rangle = 0$ für möglichst viele i, j

z.B. *Finite Elemente* (FEM):



- Ω in kleine Simplexe (*Elemente*) unterteilen (*triangulieren*)
- V Vektorraum der stetigen und elementweise linearen Funktionen

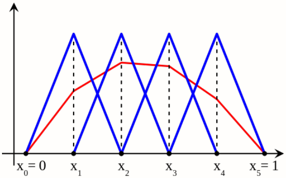
Triangulierung

- Die Triangulierung von Ω muss *konform* sein (Stetigkeit!)
- Bezeichne die Elemente als $\omega_1, \ldots, \omega_N$, d.h. $\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{N} \overline{\omega_k}$.
- Bezeichne die Knotenpunkte (*Vertices*) als $\xi_1, \ldots, \xi_M$.
- Bezeichne die Vereinigung der Elemente um den Vertex ξ_k als $\Omega_k := \text{interior} \bigcup_{j:\ \xi_k \in \overline{\omega_j}} \overline{\omega_j}$.

Basisfunktionen

Eine Basis von V erhält man, indem man zu jedem Vertex $\xi_k \in \Omega^\circ$ eine Funktion b_k definiert mit:

- $b_k(\xi_k) = 1$
- $b_k = 0$ auf $\Omega \setminus \Omega_k$
- b_k stetig und elementweise linear



Insb. gilt dann: $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \Rightarrow \langle \nabla b_i, \nabla b_j \rangle = 0$, d.h. **A** ist dünn besetzt.

Fehlerabschätzung

Satz

Sei $h := \max_k \operatorname{diam} \omega_k$. *Dann gilt*

$$\|\nabla (u - v)\| \leq ch\|\nabla^2 u\|$$

für ein $c > 0$.

Beweis

(Beweisidee)

- Céa's Lemma
- elementweise Poincaré

$\square$

Adaptive FEM

- Die Approximation wird besser, wenn man die Triangulierung verfeinert.
- In manchen Bereichen von Ω ist die Approximation aber evtl. viel besser als in anderen.
- Gleichmäßige Verfeinerung erhöht die Anzahl der Freiheitsgrade drastisch, d.h. Berechnung wird langwierig

Idee: *Adaptive FEM* (AFEM):

- Fehlerschätzer für elementweise a posteriori Fehlerabschätzung
- Iterative Verfeinerung von Elementen mit großen Fehler

$$\Rightarrow$$

Quasi-optimale Konvergenz (bzgl. der benötigten Freiheitsgrade)

Noch Fragen?

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Bitte zögern Sie nicht Fragen zu stellen!