Das Marcinkiewicz Interpolations Theorem

Carolin Freundl

LMU München

Zillertal vom 12.12.2013 - 15.12.2013

Operatoren vom starken und schwachen Typ

Definition: Es seien $1 \leq p, q \leq \infty$.

1. Sei $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$. T heißt vom **starken Typ (p,q)**, wenn

$$\| Tf\|_{L^q} \leq A||f||_{L^p},\ f \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

   wobei A unabhängig von f ist.

2. Ein Operator T heißt vom **schwachen Typ (p,q)** $\Leftrightarrow$ für jedes $\alpha > 0,\ f \in L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\lambda_{Tf}(\alpha) = \{x : |Tf(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{A||f||_{L^p}}{\alpha}\right)^q, q < \infty$$

   Es gilt, dass jeder Operator vom schwachen Typ(p,q) auch vom starken Typ(p,q) ist.

Subadditiver Operator, Verteilungsfunktion *und* $L^P - Norm$

Definitionen:

- T wie oben, dann heißt T **subadditiver Operator** $\Leftrightarrow \forall$ Funktionen $f_1,\ f_2$ auf dem Definitionsbereich gilt:

$$|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$$

- Sei f eine auf $\mathbb{R}^n$ definierte, messbare Funktion, dann ist die **Verteilungsfunktion** $\lambda_{Tf}(\alpha)$ gegeben durch:

$$\lambda_{Tf}(\alpha) = \{x : |f(x)| > \alpha\}, \alpha > 0$$

- Für f in $L^P(\mathbb{R}^n), 0 < p < \infty$ gilt:

$$\| f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) d\alpha \qquad , \alpha > 0$$

Der Satz von Fubini (1/3)

Sei f auf $X \times Y$ integrierbar und $\forall y \in Y : f_{(y)}(x) = f(x, y)$ und N die Nullmenge.
Dann ist die Funktion

$$F(y) = \begin{cases} \int_x f(x,y)\,dx, & wenn\ y \in Y \setminus N \\ 0, & wenn\ y \in N \end{cases}$$

über Y Lebesgue integrierbar und es gilt :

$$\int_{X+Y} f(x,y)\,dx = \int_Y \int_X f(x,y)dxdy$$

Der Satz von Fubini (2/3)

Desweiteren gilt:

1. **Vertauschungsregel**:

$$\int_y \left(\int_x f(x,y)dx \right) dy = \int_x \left(\int_y f(x,y)dy \right) dx$$

2. Ist $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ positiv und integrierbar, dann ist

$$M := \{(x,y); x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq y \leq f(x)\} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

messbar und hat das Volumen

$$v_{n+1}(M) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

Der Satz von Fubini (3/3)

Zur Veranschaulichung:

Ist B der Teil des Kreises um den Ursprung mit Radius r im 1.Quadranten, $f(x,y) := x^3y^2,\ (x,y) \in B$.

Für das Volumen ergibt sich:

$$\int_{x=0}^{r} \left(\int_{y=0}^{\sqrt{r^2-x^2}} x^3y^2 dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^r x^3(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{105} r^7$$

$$\textit{falls } B = \{(x,y) : 0 \le x \le r, 0 \le y \le \sqrt{r^2-x^2}\}$$

oder:

$$\int_{y=0}^{r} \left(\int_{x=0}^{\sqrt{r^2-y^2}} x^3y^2 dx \right) dy = \frac{1}{4} \int_0^r (r^2-y^2)^2 dy = \frac{2}{105} r^7$$

$$\textit{falls } B = \{(x,y) : 0 \le y \le r, 0 \le x \le \sqrt{r^2-y^2}\}$$

Das Marcinkiewicz Interpolations Theorem

Sei $1 < r \leq \infty$ und T ein subadditiver Operator:$L^1(\mathbb{R}^n) + L^r(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$.

Wenn T sowohl vom schwachen Typ(1,1), als auch vom schwachen Typ(r,r) ist, dann ist T auch vom starken Typ(p,p), $\forall p$ mit $1 < p < r$. Das heißt

$$\| Tf \|_{L^p} \leq A||f||_{L^p}, f \in L^p(\mathbb{R}^n), \forall 1 < p < r.$$

$\rightarrow$ Ziel: geeignetes A finden, damit die Ungleichung erfüllt ist.

Beweis (1/5)

1.Fall:$r < \infty$

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Wir zerlegen f zur Höhe $\alpha > 0$: $f = f_1 + f_r$:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{falls } |f(x)| > \alpha \\ 0, & \textit{falls } |f(x)| \leq \alpha \end{cases}$$

$\rightarrow \alpha$ fungiert als untere Schranke

$$f_r(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{falls } |f(x)| \leq \alpha \\ 0, & \textit{falls } |f(x)| > \alpha \end{cases}$$

$\rightarrow \alpha$ fungiert als obere Schranke
$\rightarrow f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $f_r \in L^r(\mathbb{R}^n)$

Beweis (2/5)

Anwendung der Verteilungsfunktion zur Abschätzung der L^p-Norm von Tf:

$$|Tf(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_r(x)|$$

$$\Rightarrow \{x : |Tf(x)| > \alpha\} \subseteq \{x : |Tf_1(x)| > \alpha/2\} \cup \{x : |Tf_r(x)| > \alpha/2\}$$

$$\Rightarrow \ \lambda_{Tf}(\alpha) \leq \lambda_{Tf_1}(\frac{\alpha}{2}) + \lambda_{Tf_r}(\frac{\alpha}{2})$$

$$\xrightarrow[\text{schwachen Typ}]{\text{Abschï£¡tzung ï£¡ber}} \ \lambda_{Tf}(\alpha) \leq \left(\frac{2A_1||f_1||_{L^1}}{\alpha}\right)^1 + \left(\frac{2A_r||f_r||_{L^r}}{\alpha}\right)^r$$

$$\stackrel{(*)}{=} \left(\frac{2A_1}{\alpha}\right)^1 \int_{|f|>\alpha} |f(x)|dx + \left(\frac{2A_r}{\alpha}\right)^r \int_{|f|\leq\alpha} |f(x)|^r dx$$

$$(*) : ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Beweis (3/5)

$$||T(f)||_{L^P}^p \leq p(2A_1)\int_0^\infty \alpha^{p-1}\alpha^{-1} \int_{|f|>\alpha}|f(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}\alpha$$

$$+p(2A_r)^r\int_0^\infty \alpha^{p-1}\alpha^{-r} \int_{|f|\leq\alpha}|f(x)|^r\mathrm{d}x\mathrm{d}\alpha$$

$$= p(2A_1)\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)| \int_0^{|f(x)|}\alpha^{p-2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x + p(2A_r)^r\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^r\int_{|f(x)|}^\infty \alpha^{p-r-1}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x$$

$$= \frac{p(2A_1)}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p \,\mathrm{d}x + \frac{p(2A_r)^r}{p-r}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p \,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow ||T(f)||_{L^P} \leq \underbrace{p\left(\frac{2A_1}{p-1}+\frac{p(2A_r)^r}{p-r}\right)^{\frac{1}{p}}}_{A}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)| \,\mathrm{d}x}_{||f||_{L^P}}$$

Anwendung des Satzes von Fubini

$$p(2A_1)\int_0^\infty \alpha^{p-2}\int_{|f|>\alpha}|f(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}\alpha \ (*)$$

Sei $\mathbb{R}^n x(0,\infty)\to\mathbb{R}$ und $\chi(x,y) := \begin{cases} 1 & \textit{falls } |f(x)|>\alpha \\ 0, & \textit{falls } |f(x)|<\alpha \end{cases}$

$$(*) = p(2A_1)\int_0^\infty \alpha^{p-2}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\chi(x,\alpha)\mathrm{d}x\mathrm{d}\alpha$$

$$\overset{Fubini}{=} p(2A_1)\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\int_0^\infty \chi(x,\alpha)\alpha^{p-2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x$$

$$= p(2A_1)\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\int_0^{|f(x)|}\alpha^{p-2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x$$

Beweis (4/5)

2.Fall: $r = \infty$
Seien $\alpha > 0$, $f = f_1 + f_\infty$

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{falls } |f(x)| > \frac{\alpha}{2A_\infty} \\ 0, & \textit{falls } |f(x)| \leq \frac{\alpha}{2A_\infty} \end{cases}$$

$$f_\infty(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{falls } |f(x)| \leq \frac{\alpha}{2A_\infty} \\ 0, & \textit{falls } |f(x)| > \frac{\alpha}{2A_\infty} \end{cases}$$

$\rightarrow ||Tf_\infty||_{L_\infty} \leq A_\infty ||f_\infty||_{L_\infty} \leq A_\infty \frac{\alpha}{2A_\infty} = \frac{\alpha}{2}$,

$\rightarrow \{x : |Tf_\infty^\alpha(x)| > \frac{\alpha}{2}\} = 0$

Beweis (5/5)

Anwendung der Verteilungsfunktion zur Abschätzung der L^p-Norm von Tf:

$$\lambda_{Tf}(\alpha) \leq \lambda_{Tf_1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 0 \leq \frac{(2A_1)||f_1||_{L^1}}{\alpha} = \frac{2A_1}{\alpha} \int_{|f| > \frac{\alpha}{2A_\infty}} |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

$$\rightarrow \; ||T(f)||^p_{L^P} \leq p(2A_1) \int_0^\infty \alpha^{p-1} \alpha^{-1} \int_{|f| > \frac{\alpha}{(2A_\infty)}} |f(x)| \mathrm{d}x \mathrm{d}\alpha$$

$$\overset{Fubini}{=} p(2A_1) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_0^{2A_\infty |f(x)|} \alpha^{p-2} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}x$$

$$= p(2A_1) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \frac{1}{p-1} 2A_\infty^{p-1} + |f(x)|^{p-1} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{p(2A_1)^p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)^p| \mathrm{d}x$$