Sobolev-Räume und schwache Ableitung

Manuela Schwarz

LMU München

München am 14.12.2012

Definition: Schwache Ableitung

Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und α ein Multiindex. Existiert eine Funktion $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx.$$

Für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, so heisst v die schwache Ableitung und man schreibt: $v = D^\alpha u$.

Definition Sobolev-Raum

Für $p \geq 1$ und k eine nicht negative ganze Zahl, wird der Sobolev-Raum definiert mit:

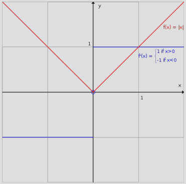
$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^P(\Omega) : D^\alpha u \in L^P(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

Sei $\varphi^k \in \mathbb{R}^{n^k}$ der Vektor von allen Ableitungen D^α mit $|\alpha| = k$.
Der Raum $W^{k,p}(\Omega)$ ist mit einer Norm ausgerichtet:

$$||u||_{k,p;\Omega} \begin{cases} (\int(|\nabla^k u|^p + ... + |u|^p)dx)^{\frac{1}{p}} & \text{falls p} < \infty \\ max\{||\nabla^k u||_\infty, ..., ||u||_\infty\} & \text{falls p} = \infty \end{cases}$$

Diese Norm ist gleichwertig zu $\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||_{p;\Omega}$

Beispiel: Die Betragsfunktion



$|x|$ besitzt auf ganz $\mathbb{R}$ keine klassische Ableitung.
Auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist die Funktion

$$|x|' = \begin{cases} -1 & : x < 0 \\ +1 & : x > 0 \end{cases}$$

die klassische Ableitung von $|x|$.
$|x|'$ ist nicht mehr schwach differenzierbar, aber man kann sie im Sinne von Distributionen ableiten.

Definition eizelner Sobolev Räume

- Der Raum $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$
- Der Raum $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist der Abschluss des Raumes $W_c^{1,p}(\Omega)$ bezüglich der Norm des Raumes $W^{k,p}(\Omega)$, wo $W_c^{1,p}(\Omega)$ die Menge von allen Funktionen $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit kompakter Unterstützung in Ω ist
- Der Raum $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ ist die Familie von allen Funktionen u, so dass $u \perp \Omega' \in W^{k,p}(\Omega'$ für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Zugehörigkeit zum Banachraum

Zeige: $W^{k,p}(\Omega)$ und $W_0^{1,p}(\Omega)$ sind Banachräume

Falls $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$, dann ist die Nullerweiterung von u in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.
Somit ist $W_0^{k,p}(\Omega)$ ein geschlossener Unterraum von $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung:
Man nennt solche Funktionen $u \in W^{k,p}(\Omega)$ stetig und beschränkt, falls es eine Funktion $\overline{u}$ gibt, so dass $\overline{u} = u$ f.ü. und diese ebenfalls ein stetig beschränktes Verhalten aufweist.

C^∞ dicht in $W^{1,p}$

Definition mollifier:

Sei φ eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und $n \geq 1$, dann gilt:

$$\Phi_\varepsilon(u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy$$

für $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$

Lemma:

Angenommen $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $1 \leq p < \infty$,
dann ist der Glättungskern u_ε, erfüllt durch:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||u_\varepsilon - u||_{1,p;\Omega'} = 0$$

wenn $\Omega' \subset\subset \Omega$

Beweis:

Da Ω' ein beschränktes Gebiet ist, existiert dort ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass

$$\varepsilon_0 < dist(\Omega', \delta\Omega)$$

Für ein $\varepsilon < \varepsilon_0$, $x \in \Omega'$ und $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta u_\varepsilon}{\delta x_i}(x) =& \varepsilon^{-n} \int_\Omega \frac{\delta \varphi}{\delta x_i}(\frac{x-y}{\varepsilon}) u(y) dy \\
&= -\varepsilon^{-n} \int_\Omega \frac{\delta \varphi}{\delta y_i}(\frac{x-y}{\varepsilon}) u(y) dy \\
&= \varepsilon^{-n} \int_\Omega \varphi(\frac{x-y}{\varepsilon}) \frac{\delta u}{\delta y_i} dy \\
&= (\frac{\delta u}{\delta x_i})_\varepsilon(x) \qquad\qquad q.e.d
\end{aligned}$$

Somit ist bewiesen, dass

$$\frac{\delta u_\varepsilon}{\delta x_i}(x) = (\frac{\delta u}{\delta x_i})_\varepsilon(x)$$

da, $||\frac{\delta u_\varepsilon}{\delta x_i} - \frac{\delta u}{\delta x_i}||_L^p = ||(\frac{\delta u}{\delta x_i})_\varepsilon - \frac{\delta u}{\delta x_i}||_L^p \longrightarrow 0$

Folgerung:
Falls $1 \leq p < \infty$, dann ist $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

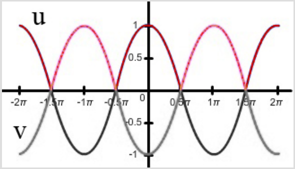
Bemerkung:
Falls Ω zusammenhängend ist, $u \in W^{1,p}(\Omega), p \geq 1$ und $\nabla u = 0$ auf Ω f.ü., dann ist u zusammenhängend auf Ω

Definition absoluter Stetigkeit:

Eine reellwertige Funktion f heisst absolut stetig, falls für jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert und

$$\sum_k |y_k - x_k| < \delta \longrightarrow \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

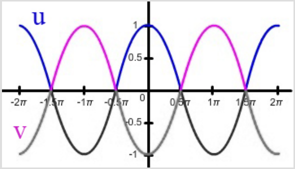
$W^{1,1}$ in $1 - Dim$



$\max\{u, v\} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$
$\min\{u, v\} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$

$\max\{u, 0\} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$
$\min\{u, 0\} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$

$|u| \in W^{1,p}$



$$\nabla max\{u, v\} = \begin{cases} \nabla u & : \text{u>v} \\ \nabla v & : \text{v>u} \end{cases}$$

$W^{1,p}$ in $n - Dim$

Gilt auch in $\mathbb{R}^n$

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ und $p \geq 1$ gilt:

$\max \{u, v\} \in W^{1,p}(\Omega)$
$\min \{u, v\} \in W^{1,p}(\Omega)$

$|u| \in W^{1,p}(\Omega)$