Existenz höherer Ableitungen

Bernhard Pfirsch

LMU München

Zillertal am 15.12.2012

Definitionen:
Sei der Operator L von der Form $Lu = \nabla \cdot (A\nabla u)$, $A : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$,
$u \in W^{1,2}(\Omega)$, $v \in C_0^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(u,v) := \int_\Omega (A\nabla u \nabla v)\,\mathrm{d}x = \text{“} - \int_\Omega \nabla \cdot (A\nabla u) v\,\mathrm{d}x\text{”}$$

Man nennt $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *schwache* Lösung von Lu=f, falls

$$\mathcal{L}(u,v) = -\int_\Omega fvdx \qquad \forall v \in C_0^1(\Omega);$$

Ziel:
$u \in W^{1,2}(\Omega)$ *schwache* Lösung der Operatorgleichung Lu=f

$$\overset{\text{Vorauss. an A,f}}{\Longrightarrow} \quad u \in W^{2,2}(\Omega') \; \forall \Omega' \subset\subset \Omega \text{ und } Lu = f \;\; f.ü..$$

Satz

Voraussetzungen:

- $u \in W^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösung von $Lu = f$ in Ω mit $f \in L^2(\Omega)$, $A_{ij} \in C^{0,1}(\Omega)$ $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$
- L strikt elliptisch in Ω, d.h. $\exists \lambda > 0 : (A(x)\xi)\xi \geq \lambda|\xi|^2, \forall x \in \Omega, \xi \in \mathrm{R}^n$

Aussage

- $\forall \Omega' \subset\subset \Omega : u \in W^{2,2}(\Omega')$
- genauer: $\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})$
  mit $C(n, \lambda, K, d')$, wobei
  $K := max(\|A_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)})$, $d' := dist(\Omega', \partial\Omega) > 0$;
- $Lu = f$ f.ü..

Der Differenzenquotient

Definition

Für $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sei der Differenzenquotient von u in Richtung e_k def. durch

$$\Delta^h u(x) = \Delta_k^h u(x) = \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h}, \qquad h \neq 0;$$

Lemma 1

Sei $u \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty$. Zudem existiere eine Konstante K, s.d

$\Delta^h u \in L^p(\Omega')$ sowie $\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq K \ \ \forall h > 0$, $\Omega' \subset\subset \Omega$

(mit $h < dist(\Omega', \partial\Omega)$).

Dann existiert die schwache Ableitung $\partial_k u$ und erfüllt $\|\partial_k u\|_{L^p(\Omega)} \leq K$.

Beweis von Lemma 1

Mit der schwachen Kompaktheit von beschränkten Mengen in $L^p(\Omega')$ (reflexiver, separabler Banachraum) gilt:

$$\exists \{h_m\}_m,\ h_m \to 0 \text{ und } v \in L^p(\Omega) \text{ mit } \|v\|_p \leq K, \text{ s.d}$$

$$\int_\Omega \varphi \cdot \Delta^{h_m} u \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \varphi \cdot v \,\mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

Ziel: $v = \partial_k u$
Es folgt für $h_m < dist(supp\ \varphi, \partial\Omega)$:

$$\int_\Omega \varphi \cdot \Delta^{h_m} u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi(x) \cdot \frac{u(x + h_m e_k) - u(x)}{h_m} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\Omega + h_m e_k} \frac{\varphi(x - h_m e_k)}{h_m} \cdot u(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{\varphi(x)}{h_m} \cdot u(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_\Omega u \cdot \Delta^{-h_m} \varphi\,\mathrm{d}x \to -\int_\Omega u \cdot \partial_k \varphi\,\mathrm{d}x$$

Mit der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt:

$$\int_\Omega \varphi \cdot v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \cdot \partial_k \varphi\,\mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

also

$$v = \partial_k u$$

$\square$

Beweisstrategie für den Satz:

1.
$$\|\Delta^h(\nabla u)\|_{L^2(\Omega')} \leq K = C(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})$$
$$\Rightarrow u \in W^{2,2}(\Omega')$$

2.
$$Lu \in L^2_{loc} \Rightarrow Lu = f \text{ f.ü.}$$

Lemma 2:

Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
Dann gilt:

- $\Delta^h u \in L^p(\Omega') \ \forall \Omega' \subset\subset \Omega$ mit $h < dist(\Omega', \partial\Omega)$
- $\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$

Beweis des Satzes

Da $Lu = f$ schwach, gilt $\int_\Omega A\nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega fv \, \mathrm{d}x \quad \forall v \in C_0^1(\Omega)$.
Sei also $v \in C_0^1(\Omega)$.

$$\Rightarrow \int_\Omega \Delta^h(A\nabla u)(\nabla v) \, \mathrm{d}x \overset{\text{wie in Lemma 1}}{=} -\int_\Omega (A\nabla u)\nabla(\Delta^h v) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f \Delta^h v \, \mathrm{d}x$$

Da nun $(\Delta^h(A\nabla u))(x) = A(x + he_k)(\Delta^h(\nabla u))(x) + (\Delta^h A)(x)(\nabla u)(x)$, gilt:

$$\int_\Omega A(x + he_k)\nabla(\Delta^h u)\nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega -(\Delta^h A)\nabla u \nabla v + f \Delta^h v \, \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_\Omega A(x + he_k)\nabla(\Delta^h u)\nabla v \, \mathrm{d}x \leq (\|(\Delta^h A)\nabla u\|_2 + \|f\|_2)\|\nabla v\|_2$$

$$\text{Mit} \qquad \|(\Delta^h A)\nabla u\|_2 = \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n |\frac{A_{ij}(x+he_k) - A_{ij}(x)}{h}\partial_j u|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq n \cdot \max_{i,j} \|A_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega A(x+he_k)\nabla(\Delta^h u)\nabla v \,\mathrm{d}x \leq (C(n,K)\cdot \|u\|_{W^{1,2}} + \|f\|_2)\|\nabla v\|_2$$

Sei nun $\eta \in C_0^1(\Omega),\ 0 \leq \eta \leq 1$ und setze $v = \eta^2 \Delta^h u$.

$(\Rightarrow v \in W_0^1(\Omega) = \overline{C_0^1(\Omega)})$

$$\Rightarrow \lambda \int_\Omega |\eta\nabla(\Delta^h u)|^2 \,\mathrm{d}x \overset{\text{Elliptizität}}{\leq} \int_\Omega \eta^2 A(x+he_k)\nabla(\Delta^h u)\nabla(\Delta^h u)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_\Omega A(x+he_k)\nabla(\Delta^h u)(\nabla v - 2(\Delta^h u)\eta\nabla\eta)\,\mathrm{d}x$$

Denn:

$$\nabla v \overset{v=\eta^2\Delta^h u}{=} \eta^2\nabla(\Delta^h u) + 2(\Delta^h u)\eta\nabla\eta$$

Nun gilt:

1.
$$\int_\Omega A(x+he_k)\nabla(\Delta^h u)\nabla v \le (C(n,K)\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2)\|\nabla v\|_2$$
$$\le (C(n,K)\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2)(\|\eta\nabla(\Delta^h u)\|_2 + 2\|(\Delta^h u)\nabla\eta\|_2)$$

2.
$$\int_\Omega A(x+he_k)\nabla(\Delta^h u)(\Delta^h u)\eta\nabla\eta \le C(n,K)\|\eta\nabla(\Delta^h u)\|_2\|((\Delta^h u)\nabla\eta\|_2$$

$$\Rightarrow \lambda \int_\Omega |\eta \nabla(\Delta^h u)|^2 \, \mathrm{d}x \leq (C(n,K)\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2)(\|\eta\nabla(\Delta^h u)\|_2 +$$

$$2\|(\Delta^h u)\nabla\eta\|_2) + C(n,K)\|\eta\nabla(\Delta^h u)\|_2 \|(\Delta^h u)\nabla\eta\|_2 \leq$$

$$C(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2 + \|(\Delta^h u)\nabla\eta\|_2)(\|\eta\nabla(\Delta^h u)\|_2 + 2\|(\Delta^h u)\nabla\eta\|_2)$$

bzw.

$$\frac{\lambda}{C} z^2 \leq a(z+x)$$

Die Young'sche Ungleichung lässt sich schreiben als

$$2ab \leq \varepsilon^2 a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon^2} \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{C} z^2 \leq a(z+x) &\leq \frac{\varepsilon^2 a^2}{2} + \frac{z^2 + 2xz + x^2}{2\varepsilon^2} \\
&\leq \frac{\varepsilon^2 a^2}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2}(z^2 + x^2 + \delta^2 x^2 + \frac{z^2}{\delta^2}) \\
&= \frac{\varepsilon^2 a^2}{2} + (\frac{1+\delta^2}{2\varepsilon^2})x^2 + (\frac{\delta^2+1}{2\varepsilon^2\delta^2})z^2
\end{aligned}$$

Wählt man nun ε,δ so, dass $(\frac{\delta^2+1}{2\varepsilon^2\delta^2}) \leq \frac{\lambda}{2C}$ erhält man

$$z^2 \leq C(\lambda)a^2$$

bzw.

$$\begin{aligned}\|\eta\Delta^h(\nabla u)\|_2 &\leq C_1(n,K,\lambda)(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta^h u\nabla\eta\|_2)\\ &\leq C_1(n,K,\lambda)(1+\sup_{\Omega}|\nabla\eta|)(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})\end{aligned}$$

mit

$$\|\Delta^h u\nabla\eta\|_2 \leq \sup_{\Omega}|\nabla\eta|\|\Delta^h u\|_2 \leq \sup_{\Omega}|\nabla\eta|\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

Wählen wir nun η als Abschneidefunktion mit

$$\eta_{|\Omega'} = 1 \text{ für } \Omega^{'} \subset\subset \Omega, |\nabla\eta| \leq \frac{2}{d'}$$

erhalten wir

$$\|\Delta^h(\nabla u)\|_{L_2(\Omega')} \leq C_1(n, K, \lambda, d^{'})(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})$$

also nach Lemma 1

$$\nabla u \in W^{1,2}(\Omega^{'}), \text{ d.h. } u \in W^{2,2}(\Omega^{'})\ \forall \Omega^{'} \subset\subset \Omega$$

sowie

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq C(n, K, \lambda, d^{'})(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})$$

$$\text{Mit } u \in W^{2,2}(\Omega')$$

$$\Rightarrow Lu = \nabla \cdot (A \nabla u) \in L^2_{loc}$$

und da

$$\mathcal{L}(u, v) = -\int_\Omega (Lu) v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \quad \forall v \in C^1_0(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega (Lu - f) v \,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in C^1_0(\Omega)$$

gilt mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung (bzw. Lemma von du Bois-Reymond)

$$Lu = f \quad \text{f.ü.}$$

□

Satz

Voraussetzungen:

- $u \in W^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösung von $Lu = f$ in Ω mit $f \in L^2(\Omega)$, $A_{ij} \in C^{0,1}(\Omega)$ $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$
- L strikt elliptisch in Ω, d.h. $\exists \lambda > 0 : (A(x)\xi)\xi \geq \lambda|\xi|^2, \forall x \in \Omega, \xi \in \mathrm{R}^n$

Aussage

- $\forall \Omega' \subset\subset \Omega : u \in W^{2,2}(\Omega')$
- genauer: $\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})$
  mit $C(n, \lambda, K, d')$, wobei
  $K := max(\|A_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)})$, $d' := dist(\Omega', \partial\Omega) > 0$;
- $Lu = f$ f.ü..