Eigenschaften parabolischer Lösungen

Sabine Hegemann

13.12.2012

Gliederung

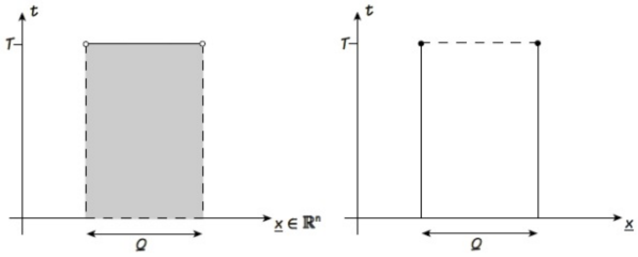
- Die parabolische Mittelwerteigenschaft für die Wärmeleitungsgleichung
- Das Maximumsprinzip
- Eindeutigkeit auf beschränkten Gebieten

Definitionen

Sei U eine offene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, Zeit $T > 0$.

Definiere:

- Parabolischer Zylinder: $U_T := U \times (0, T]$
- Parabolischer Rand von U_T: $\Gamma_T := \overline{U}_T - U_T$



Definitionen

Für feste $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, r > 0$ definiere:

$$E(x, t; r) := \{(y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n}\}$$

wobei

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0, & (x \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Die parabolische Mittelwerteigenschaft für die Wärmeleitungsgleichung

Satz:

Sei $u \in C_1^2(U_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.
Dann gilt für alle $E(x,t;r) \subset U_T$:

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} \, dyds$$

Die parabolische Mittelwerteigenschaft - Beweisskizze

Setze die Raum- und Zeitkoordinate so, dass $x = 0$ und $t = 0$.
Schreibe $E(r) = E(0, 0; r)$ und setze

$$\varphi(r) := \frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} \, dyds \quad = \iint_{E(1)} u(ry, r^2 s) \frac{|y|^2}{s^2} \, dyds.$$

1. Schritt: Zeige: $\varphi'(r) = 0$
$\Rightarrow \varphi(r)$ ist konstant

2. Schritt: Zeige: Die Konstante ist $4u(0, 0)$
$\Rightarrow u(0, 0) = \frac{1}{4}\varphi(r)$

Berechne

$$\begin{aligned}\varphi'(r) &= \iint_{E(1)} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2ru_s \frac{|y|^2}{s}\, dyds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|y|^2}{s}\, dyds =: A + B\end{aligned}$$

Nun wird folgende Funktion eingeführt:

$$\psi := -\frac{n}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n\log(r)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow B &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4u_s \sum_{i=1}^{n} y_i \psi_{y_i}\, dyds \\ &= \cdots = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4nu_s\psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i\, dyds - A\end{aligned}$$

$$\varphi'(r) = A + B = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4n\Delta u\psi - \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \; dyds$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4nu_{y_i}\psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i \; dyds = 0$$

$$\Rightarrow \varphi \textit{ ist konstant}$$

$$\varphi(r) = \lim_{t\to 0} \varphi(t) = u(0,0)(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^n} \iint_{E(t)} \frac{|y|^2}{s^2} \; dyds) = \cdots = 4u(0,0)$$

$$\Rightarrow u(0,0) = \frac{1}{4}\varphi(r)$$

Das Maximumsprinzip

Satz:
Wir nehmen an $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ löst die Wärmeleitungsgleichung in U_T.

(i) (Schwaches Maximumsprinzip):
Dann gilt

$$\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$$

(ii) (Starkes Maximumsprinzip):
Falls U zusammenhängend ist und ein Punkt $(x_0, t_0) \in U_T$ existiert sodass

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{U}_T} u$$

gilt, dann ist u konstant in $\overline{U}_{t_0}$.

Die gleiche Aussage gilt auch für das Minimum.

Maximumsprinzip - Beweis

Wir nehmen an, es existiert ein Punkt $(x_0, t_0) \in U_T$ mit $u(x_0, t_0) = M := \max_{\overline{U}_T} u$. Für ausreichend kleines $r > 0$ ist dann $E(x_0, t_0; r) \subset U_T$.

Aus der Mittelwerteigenschaft folgt nun:

$$\begin{aligned} M = u(x_0, t_0) &= \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0,t_0;r)} u(y, s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} \, dyds \\ &\leq \sup u \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0,t_0;r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} \, dyds = M \end{aligned}$$

da $\frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0,t_0;r)} \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2} \, dyds = 1$.

$\Rightarrow u(y, s) = M$ für alle $(y, s) \in E(x_0, t_0; r)$.

Eindeutigkeit auf beschränkten Gebieten

Satz:

Sei $g \in C(\Gamma_T), f \in C(U_T)$.
Dann existiert maximal eine Lösung $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ des Grenzwertproblems:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & (x,t) \in U_T \\ u = g, & (x,t) \in \Gamma_T \end{cases}$$

Eindeutigkeit - Beweis

Angenommen u_1, u_2 sind Lösungen, sodass für $u = u_1 - u_2$ gilt:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x,t) \in U_T \\ u = 0, & (x,t) \in \Gamma_T \end{cases}$$

Aus dem schwachen Maximumsprinzip folgt:

$$u(x,t) = 0 \text{ für alle } (x,t) \in \overline{U}_T$$
$$\Rightarrow u_1 = u_2$$

Danke für die Aufmerksamkeit!