LMU München • Dominic, Lars, Sebastian

Sobolev-Einbettungen

Skalierung

Satz

Für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ gilt $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$

Beweis: $u(x) = u(-\infty) + \int_{-\infty}^{x} u'(y)\,dy$

Ansatz Finde $p \in [1, \infty]$ mit $\|u\|_p \leq c\,\|\nabla u\|_1$ für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Skalierung $u_R(x) := u(Rx)$ ergibt $(\nabla u_R)(x) = R\,(\nabla u)(Rx)$ und

$$\|u\|_p = R^{\frac{n}{p}} \|u_R\|_p \overset{!}{\leq} c\,R^{\frac{n}{p}} \|\nabla u_R\|_1 = R^{\frac{n}{p}+1-n} \|\nabla u\|_1.$$

Daraus folgt $\frac{n}{p} + 1 - n = 0$, d.h. $p = \frac{n}{n-1}$.

Skalierung

Satz

Für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ gilt $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$

Beweis: $u(x) = u(-\infty) + \int_{-\infty}^{x} u'(y)\,dy$

Ansatz Finde $p \in [1, \infty]$ mit $\|u\|_p \leq c\,\|\nabla u\|_1$ für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Skalierung $u_R(x) := u(Rx)$ ergibt $(\nabla u_R)(x) = R\,(\nabla u)(Rx)$ und

$$\|u\|_p = R^{\frac{n}{p}}\|u_R\|_p \overset{!}{\leq} c\,R^{\frac{n}{p}}\|\nabla u_R\|_1 = R^{\frac{n}{p}+1-n}\|\nabla u\|_1.$$

Daraus folgt $\frac{n}{p} + 1 - n = 0$, d.h. $p = \frac{n}{n-1}$.

Einbettungssatz

Sobolev Einbettungen

Für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $k \geq 1$ gilt

$$\|u\|_p \leq c\,\|\nabla^k u\|_q \qquad \text{falls } k - \frac{n}{q} \geq -\frac{n}{p} \qquad (p < \infty),$$
$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} \leq c\,\|\nabla^k u\|_q \qquad \text{falls } k - \frac{n}{q} \geq \alpha \qquad (\alpha > 0).$$

- $W^{k,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ mittels Dichtheit.
- Beschränkte Gebiete: man kann zu kleinerem p wechseln.
- $|x|^\alpha \in C^{0,\alpha}$ hat Index α.
- L^p hat Index $-\frac{n}{p}$, $W^{k,q}$ hat Index $k - \frac{n}{q}$