Der Satz von Hilbert-Haar

Sophia Grundner-Culemann

Zillertal im Juni 2014

Lipschitzstetigkeit

Definition (Lipschitzstetigkeit)

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz – stetig* auf Ω, falls eine Konstante $M \geq 0$ existiert, sodass

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Die Lipschitzkonstante $Lip(f)$ von f ist die kleinste dieser Zahlen.

Lip(Ω):=$\{f : \Omega \to \mathbb{R}|$ f Lipschitz-stetig, f beschränkt$\}$

Definition

$R \geq Lip(\phi)$:
$Lip_R(\Omega, \phi) := \{f \in Lip(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = \phi|_{\partial\Omega}, Lip(f) \leq R\}$

Konvexität

Satz

$Lip_R(\Omega, \phi)$ ist eine konvexe Teilmenge von $Lip(\Omega)$.

Beweis.

Seien $f, g \in Lip_R(\Omega, \phi)$, $0 < t < 1$:

$(tf + (1-t)g)|_{\partial\Omega} = \phi$ und

$\|\nabla(tf + (1-t)g)\|_\infty \leq t\|\nabla f\|_\infty + (1-t)\|\nabla g\|_\infty \leq R$,

also $tf + (1-t)g \in Lip_R(\Omega, \phi)$.

$\square$

Das Randwertproblem

Dirichlet-Problem:

$$\begin{cases} div\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0 \\ f|_{\partial\Omega} = \Phi \end{cases}$$

Die Lösung besteht in der Minimierung des Flächenfunktionals

$$A_\Omega(f) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx$$

Problem und Lösungsweg

Problem bei der Minimierung:
Minimalfolgen müssen nicht konvergent sein.

Betrachte also A_Ω auf $Lip_R(\Omega, \phi)$ und zeige:

Satz (Satz von Haar)

Rand Lipschitzstetig $\Rightarrow$ *Es exististiert ein Lipschitzstetiger Minimierer.*

Zwischenschritt:
Wenn $\phi \in Lip_R(\Omega, \phi) \Rightarrow$ Es gibt eindeutigen Minimierer in $Lip_R(\Omega, \phi)$.

Eigenschaften von A_Ω

Satz

A_Ω ist auf $Lip_R(\Omega, \phi)$ streng konvex.

Beweis.

- $tf + (1-t)g \in Lip_R(\Omega, \phi)$
- $A_\Omega(tf + (1-t)g)) = \int_\Omega \sqrt{1 + |t\nabla f + (1-t)\nabla g|^2} dx =$
  $= \int_\Omega \|t(1, \nabla f) + (1-t)(1, \nabla g)\| dx \leq$
  $\leq t \int_\Omega \|(1, \nabla f)\| dx + (1-t) \int_\Omega \|(1, \nabla g)\| dx =$
  $= tA_\Omega(f) + (1-t)A_\Omega(g)$
- $f \neq g \Rightarrow$ Striktheit

$\square$

Eindeutigkeit des Minimums

Wenn A_Ω ein Minimum f_R auf $Lip_R(\Omega, \phi)$ besitzt, ist es eindeutig.

Beweis.

Seien $f_1, f_2 \in Lip_R(\Omega, \phi)$ Minimierer von A_Ω und $f_1 \neq f_2$.

Dann gilt für $\widetilde{f} = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2$:

$$A_\Omega(\widetilde{f}) < \frac{1}{2} A_\Omega(f_1) + \frac{1}{2} A_\Omega(f_2) = \min A_\Omega \leq A_\Omega(\widetilde{f})$$

Widerspruch!

$\square$

Existenz des Minimums

Satz

A_Ω besitzt eine Minimalstelle f_R in $Lip_R(\Omega, \phi)$

Beweis

Sei (f_m) Minimalfolge in $Lip_R(\Omega, \phi)$, d.h

$$A_\Omega(f_m) \to A_0 = \inf_{f \in Lip_R(\Omega,\phi} A_\Omega(f)$$

Für $x_0 \in \partial\Omega$:

$$|f_m(x)| \leq |f_m(x_0)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| \leq$$
$$\leq |\phi(x_0)| + R|x - x_0| \leq |\phi(x_0)| + Rdiam(\Omega)$$

Also ist (f_m) glm. beschränkt und glm. stetig und Ω kompakt.

Existenz des Minimums

Aus dem Satz von Arzelà-Ascoli folgt:
Es gibt es eine Teilfolge (f_{mj}) und eine Funktion $f_R \in Lip_R(\Omega, \phi)$ mit $f_{mj} \to f_R$.
Weil A_Ω unterhalbstetig ist, gilt:

$$A_\Omega(f_R) \leq \liminf_{m\to\infty} A_\Omega(f_{mj}) = A_0 \leq A_\Omega(f_R)$$

Also gibt es ein A_Ω-Minimum auf $Lip_R(\Omega, \phi)$.

Vergleichsprinzip

Satz

Sei ψ Lipschitzstetig, $Lip(\psi) \leq R$, g_R sei A_Ω-minimal in $Lip_R(\Omega, \psi)$. Für $\phi \leq \psi$ folgt dann: $f_R \leq g_R$

Beweis

Sei $h_R = min(f_R, g_R) \in Lip_R(\Omega, \phi)$
Da f_R Minimierer: $A_\Omega(f_R) \leq A_\Omega(h_R)$, d.h.:

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} dx \leq \int_{[f_R \leq g_R]} \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} dx + \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} dx$$

$$\Rightarrow A_{[f_R > g_R]}(f_R) \leq A_{[f_R > g_R]}(g_R)$$

Vergleichsprinzip

Analog: Sei $H_R = min(f_R, g_R) \in Lip_R(\Omega, \psi)$
Da g_R Minimierer: $A_\Omega(f_R) \leq A_\Omega(h_R)$, d.h.:

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} dx \leq \int_{[f_R \leq g_R]} \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} dx + \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} dx$$

$$\Rightarrow A_{[f_R > g_R]}(f_R) \geq A_{[f_R > g_R]}(g_R)$$

Insgesamt:
$A_{[f_R > g_R]}(f_R) = A_{[f_R > g_R]}(g_R)$ und somit $A_\Omega(f_R) = A_\Omega(h_R)$.

Wegen $\phi \leq \psi$ gilt also: $f_R \leq g_R$

Bounded Slope Condition

Sei $\Gamma := \{(z, \phi(z)) | z \in \partial\Omega\}$ eine Randmannigfaltigkeit.

Definition (Bounded Slope Condition)

Γ erfüllt die B.S.C. mit $K \geq 0$ gdw für alle $p \in \Gamma$ eine affin-lineare Funktion $L^{\pm} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$L_p^{\pm}(x) = a^{\pm}(x - x_0) + \phi(x_0)$$

und den Eigenschaften

- $L_p^{-}(x) \leq \phi(x) \leq L_p^{+}(x)$
- $|a^{\pm}| \leq K$

Beschränkte Lipschitzkonstante

Satz

Sei Ω konvex, ϕ sei Lipschitzstetig und die B.S.C. für $K \geq 0$ erfüllt. Wähle $R > K$. Dann gilt:

$$Lip(f_R) \leq K$$

.

Beweis:

- Wähle affin-lineare Funktionen $L^{\pm}$ und $x_0 \in \partial\Omega$ mit $L^- \leq \phi \leq L^+$ auf $\partial\Omega$, $Lip(L^{\pm}) \leq K, L^-(x_0) = \phi(x_0) = L^+(x_0)$
- $L^- \leq f_R \leq L^+$ auf $\overline{\Omega}$ (Minimumsprinzip)
- Sei $x \in \overline{\Omega}$:
  $f_R(x) - f_R(x_0) = f_R(x) - \phi(x_0) \leq L^+(x) - \phi(x_0) =$
  $= L^+(x) - L^+(x_0) \leq K|x - x_0|$
  und analog $f_R(x) - f_R(x_0) \geq -K|x - x_0|$

Beschränkte Lipschitzkonstante

Also: $Lip(f_R) \leq K$ für $x \in \overline{\Omega}, y \in \partial\Omega$ gezeigt.

Seien nun $x, y \in \Omega$ beliebig; $v := y - x$, $\Omega' := \Omega \cap (v + \Omega)$

Das Vergleichsprinzip liefert:

$$\sup_{z \in \Omega'} |f_R(z) - f_R(z - v)| \leq \sup_{z \in \partial\Omega} |f_R(z) - f_R(z - v)|$$

Das Supremum wird in einem Punkt $z_0 \in \partial\Omega$ realisiert.

Für $z \in \partial\Omega \cap \partial\Omega'$:

$$|f_R(y) - f_R(x)| = |f_R(y) - f_R(y - v)| \leq$$

$$\leq \sup_{z \in \Omega'} |f_R(z) - f_R(z - v)| \leq |f_R(z_0) - f_R(z_0 - v)| \leq K|v| = K|x - y|$$

Abschluss

Satz

Sei Ω konvex, ϕ Lipschitz-stetig. Erfüllen ϕ und Ω eine B.S.C, dann gibt es einen eindeutigen Minimierer für A_Ω in $Lip(\Omega, \phi) := \{g \in Lip(\Omega) : g|_{\partial\Omega} = \phi\}$.