LMU Munich • Lars Diening

Lipschitz-Truncation

Lipschitz-Truncation

Lipschitz-Truncation

Approximiere eine Sobolev-Funktion durch Lipschitz-Funktionen.

Nebenbedingung: Ändere hierbei die Funktion nur auf einer kleinen Menge.

Glättung (mittels Faltung) ändert die Funktion global!

Methode geht auf Acerbi-Fusco 1984 zurück.

Die Maximalfunktion – Eine Kurzübersicht

Maximalfunktion: $$(Mf)(x) = \sup_{B \ni x} \fint_B |f|\, dy.$$

Mf ist unterhalbstetig, d.h. $\{Mf > \lambda\}$ ist offen.

Majorante: $|f| \leq Mf$

Beschränkt: $\|Mf\|_p \lesssim \|f\|_p$ für $p > 1$

Falsch für $p = 1$:

1. $f := \chi_{(-1,1)} \in L^1 \quad \Rightarrow \quad Mf(x) \gtrsim \frac{1}{1+|x|} \notin L^1(\mathbb{R})$.
2. $f(x) := \chi_{(0,\frac{1}{e})} \frac{1}{x(\log x)^2} \in L^1(0, \frac{1}{e}) \quad \Rightarrow \quad Mf(x) \gtrsim \frac{1}{x(\log x)} \notin L^1(0, \frac{1}{e})$.

L^1-Ersatz: $\sup_{\lambda > 0} \big(\lambda |\{Mf > \lambda\}|\big) \lesssim \|f\|_1$.

Lipschitz-Truncation – Gradienten abschneiden

Für $\mathbf{w} \in W^{1,1}(\Omega)$ haben wir

$$|\mathbf{w}(x) - \mathbf{w}(y)| \lesssim |x - y| \big(M(\nabla \mathbf{w})(x) + M(\nabla \mathbf{w})(y)\big),$$

- $\mathbf{w}$ ist Lipschitz außerhalb der kleinen, offenen schlechten Menge $\mathrm{Bad}_\lambda := \{M(\nabla \mathbf{w}) > \lambda\}$.
- Schneide die schlechte Menge heraus und

  setze $\mathbf{w}$ fort zu $\mathbf{w}_\lambda \in W^{1,\infty}(\Omega)$ mit $\|\nabla \mathbf{w}_\lambda\|_\infty \lesssim \lambda$.

Lipschitz-Truncation – Gradienten abschneiden

Für $\mathbf{w} \in W^{1,1}(\Omega)$ haben wir

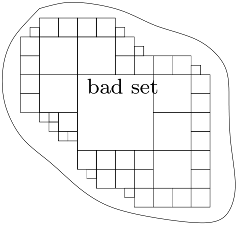
$$|\mathbf{w}(x) - \mathbf{w}(y)| \lesssim |x - y| \big(M(\nabla \mathbf{w})(x) + M(\nabla \mathbf{w})(y)\big),$$

- $\mathbf{w}$ ist Lipschitz außerhalb der kleinen, offenen schlechten Menge $\mathtt{Bad}_\lambda := \{M(\nabla \mathbf{w}) > \lambda\}$.
- Schneide die schlechte Menge heraus und

  setze $\mathbf{w}$ fort zu $\mathbf{w}_\lambda \in W^{1,\infty}(\Omega)$ mit $\|\nabla \mathbf{w}_\lambda\|_\infty \lesssim \lambda$.

Lipschitz-Truncation – moderne Version

$\mathbf{w} \in W^{1,1}$ ist Lipschitz außerhalb
von $\mathtt{Bad}_\lambda := \{M(\nabla \mathbf{w}) > \lambda\}$.



Whitney-Überdeckung $\mathtt{Bad}_\lambda = \bigcup_i Q_i$
mit Zerlegung der Eins φ_i.

Dann gilt $\displaystyle \fint_{Q_i} |\nabla \mathbf{w}|\,dx \lesssim \lambda$.

Definiere $\mathbf{w}_\lambda := \begin{cases} \mathbf{w} & \text{auf guter Menge,} \\ \sum_i \varphi_i \langle \mathbf{w} \rangle_{Q_i} & \text{auf } \mathtt{Bad}_\lambda. \end{cases}$

Es gilt $\displaystyle \mathbf{w} = \mathbf{w}_\lambda + \sum_i \varphi_i(\mathbf{w} - \langle \mathbf{w} \rangle_{Q_i})$, da $\sum_i \varphi_i = 1$ auf $\mathtt{Bad}_\lambda$.

Grundeigenschaften

Wohl definiert

Wir haben $\mathbf{w}_\lambda \in W^{1,1}$

Nutze, dass $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\lambda + \sum_i \varphi_i(\mathbf{w} - \langle \mathbf{w} \rangle_{Q_i})$. Summe konvergiert in $W^{1,1}$.

Hierfür brauchen wir Poincaré: $\|w - \langle \mathbf{w} \rangle_{Q_i}\|_{L^1(Q_i)} \lesssim r_i \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^1(Q_i)}$.

Stabilität

$\|\mathbf{w}_\lambda\|_p \lesssim \|\mathbf{w}\|_p$ und $\|\nabla \mathbf{w}_\lambda\|_p \lesssim \|\nabla \mathbf{w}\|_p$ für $1 \leq p \leq \infty$.

Hierfür brauchen wir Jensen: $(⨍_Q |f|\, dx)^p \leq ⨍ |f|^p\, dx$.

Lipschitz Eigenschaft

$M(\nabla \mathbf{w}_\lambda) \lesssim \lambda$. Insbesondere, $\|\nabla \mathbf{w}_\lambda\|_\infty \lesssim \lambda$.

Nutze Whitney Würfel: $⨍_{Q_i} |\nabla \mathbf{w}|\, dx \lesssim \lambda$.

Zusammenfassung

Theorem

Für $\mathbf{w} \in W^{1,1}$ und $\lambda > 0$ gilt

1. $\mathbf{w}_\lambda \in W^{1,\infty}$ und $\|\nabla \mathbf{w}_\lambda\| \lesssim \lambda$.
2. $\|\mathbf{w}_\lambda\|_p \lesssim \|\mathbf{w}\|_p$ für $1 \leq p \leq \infty$.
3. $\|\nabla \mathbf{w}_\lambda\|_p \lesssim \|\nabla \mathbf{w}\|_p$ für $1 \leq p \leq \infty$.
4. $\{\mathbf{w} \neq \mathbf{w}_\lambda\} \subset \{M(\nabla \mathbf{w}) > \lambda\}$ ist klein.
5. $\mathbf{w}_\lambda \to \mathbf{w}$ in $W^{1,1}$ für $\lambda \to \infty$.

Calderón-Zygmund Zerlegung

Calderón-Zygmund Zerlegung

Man kann $f \in L^1$ zerlegen in

$$f = g + \sum_i \varphi_i (f - \langle f \rangle_{Q_i})$$

mit $g \in L^\infty$.

Lipschitz-Truncation

Wir können $\mathbf{w} \in W^{1,1}$ zerlegen in

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\lambda + \sum_i \varphi_i (\mathbf{w} - \langle \mathbf{w} \rangle_{Q_i})$$

mit $\mathbf{w}_\lambda \in W^{1,\infty}$.

Zusätzliche Kleinheit

Weak-type Abschätzung: $\lambda^p |\{M(\nabla \mathbf{w}) > \lambda\}| \leq c\, \|\nabla \mathbf{w}\|_p^p.$

Für $p > 1$ gilt: $\sum_j (2^j)^p |\{M(\nabla \mathbf{w}) > 2^j\}| \approx \|M(\nabla \mathbf{w})\|_p^p \leq c\, \|\nabla \mathbf{w}\|_p^p.$

Meiste Summanden sind klein.

Kleinheit:

Für $p > 1$ existiert $\lambda \in [2^{2^j}, 2^{2^{j+1}}]$ mit

$$\|\chi_{\{\mathbf{w} \neq \mathbf{w}_\lambda\}} \nabla \mathbf{w}_\lambda\|_p^p \leq c\, \lambda^p |\{M(\nabla \mathbf{w}) > \lambda\}| \leq c\, 2^{-j}\, \|\nabla \mathbf{w}\|_p^p.$$

Nullrandwerte

Theorem

Lipschitz-Truncation kann Nullrandwerte erhalten!

Zur Erinnerung: $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\lambda + \sum_i \varphi_i(\mathbf{w} - \langle \mathbf{w} \rangle_i)$.

weg von $\partial\Omega$: $\mathbf{w}_i := \langle \mathbf{w} \rangle_{Q_i}$

nahe bei $\partial\Omega$: $\mathbf{w}_i := 0$

Brauchen Voraussetzungen an Ω für Poincaré: fettes Komplement.