Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 20.05.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Präsenzaufgaben 5

Aufgabe 1:
Gegeben ist die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie das Vektorfeld von f.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) := \begin{pmatrix} \sin(x_1 x_2^2) \\ e^{x_1+x_2} \\ \log(1+|x|^2) \end{pmatrix}$;

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x) := \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ \arctan(x_1 x_2) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3:
Für eine partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren wir die Divergenz durch

$$\operatorname{div} f(x) := \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x)$$

und für $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Rotation durch

$$\operatorname{curl} g := (\partial_2 g_3 - \partial_3 g_2) e_1 + (\partial_3 g_1 - \partial_1 g_3) e_2 + (\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1) e_3$$

wobei e_1, e_2 und e_3 die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^3$ darstellen. Zeigen Sie für ein zweimal stetig partiell differenzierbares Vektorfeld $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Gleichung $\operatorname{div}(\operatorname{curl}(h)) = 0$.

Aufgabe 4:
Die Funktion $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x_1, x_2) := |x_1|^{x_2}$$

definiert. Bestimmen Sie, an welchen Punkten des Definitionsbereichs f differenzierbar ist und geben Sie dort die Jacobi-Matrix an.