Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 27.05.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und strikt positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$ sowie

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass f genau ein Minimum annimmt und geben Sie dieses an.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 2x_1^3 + 6x_1x_2^2 - 3x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2.$$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Bestimmen Sie von

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

die Taylorreihe um den Punkt $(0, 0)$ bis zu den Gliedern einschließlich 3. Ordnung.

Aufgabe 4: **(2+1+2) Punkte**

Wir betrachten

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x_2 - x_1^2)(x_2 - 2x_1^2) \end{aligned}$$

(a) Sei $(0, 0) \neq (a, b) \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (ta, tb)$ eine Gerade durch den Ursprung. Zeigen Sie, dass 0 ein lokales Minimum von $f \circ \gamma$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Hessematrix $H_f(0) \geq 0$.

(c) Zeigen Sie, dass $(0, 0)$ kein lokales Extremum von f ist.

Aufgabe 5: **(3+2) Punkte**

In dieser Aufgabe betrachten wir Polarkoordinaten $(r, \varphi) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi) =: P$. Mit der Transformation

$$\begin{aligned} \tilde{x}(r, \varphi) &:= r \cos \varphi, \\ \tilde{y}(r, \varphi) &:= r \sin \varphi \end{aligned}$$

kann man Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten umrechnen.

(a) Es sei $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \vee y \neq 0\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $T = (\tilde{x}, \tilde{y}) : P \to K$ bijektiv ist und dass die Umkehrfunktion $T^{-1} = (\tilde{r}, \tilde{\varphi})$ stetig differenzierbar ist. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x \tilde{r}$, $\partial_y \tilde{r}$, $\partial_x \tilde{\varphi}$, $\partial_y \tilde{\varphi}$.

(b) Nun sei $f : P \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Gemäß Teil (a) ist dann auch $\tilde{f} := f \circ T^{-1}$ differenzierbar. Beweisen Sie die Formel

$$(\nabla \tilde{f}) \circ T = \partial_r f \cdot e_r + \frac{1}{r} \partial_\varphi f \cdot e_\varphi,$$

wobei wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} e_r : P \to \mathbb{R}^2,\ e_r(r, \varphi) &:= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \\ e_\varphi : P \to \mathbb{R}^2,\ e_\varphi(r, \varphi) &:= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

verwenden.